

# Determinación de Prensiones con Equilibrio de Fuerzas con Cuatro Puntos de Contacto en Objetos Poliédricos

Ricardo Prado y Raúl Suárez

Instituto de Organización y Control de Sistemas Industriales (IOC),  
Universidad Politécnica de Cataluña, Barcelona, España,  
e-mail: sixto.ricardo.prado@upc.es, raul.suarez@upc.es

**Resumen**—En este artículo se presenta un método heurístico para la generación de prensiones con equilibrio de fuerzas con 4 puntos de contacto no-coplanares. Primero se determinan los conjuntos de cuatro caras del objeto cuyas orientaciones y posiciones relativas permiten obtener al menos uno de los tres tipos de prensiones no-coplanares: *concurrente*, *flat-pencil* y *régulo*; segundo, estos conjuntos son evaluados usando una función de calidad y se selecciona el mejor de ellos; y tercero, se calculan los puntos de contacto sobre el objeto mediante una heurística que permite un rápido cálculo y asegura una prensión con equilibrio de fuerzas.

**Índice de Términos** — robótica; manos mecánicas; prensiones con equilibrio de fuerzas.

## I. INTRODUCCIÓN

Una prensión con equilibrio de fuerzas presenta la propiedad de contrarrestar, usando las fuerzas aplicadas por los dedos, cualesquiera fuerzas y torques ejercidas externamente sobre el objeto. La teoría de la prensión de objetos con equilibrio de fuerzas ha sido ampliamente estudiada y se han propuesto diferentes técnicas que dependen de las orientaciones de las caras a ser contactadas (paralelas o no-paralelas), el número de dedos, el tipo de contactos (rígidos o blandos), y la forma del objeto (cóncavo o convexo) [1]-[5].

La propuesta presentada en este artículo para determinar prensiones con equilibrio de fuerzas con cuatro puntos de contacto no-coplanares tiene como base las herramientas y criterios usados en Prado y Suárez [6], donde se presenta un método para construir prensiones con equilibrio de fuerzas con tres puntos de contacto en 3D con las siguientes características:

- No está limitado por las orientaciones relativas de las caras a contactar (pudiendo ser estas paralelas o no-paralelas) ni por la forma del objeto (cóncavo o convexo).
- No precisa modelar el cono de fricción para determinar prensiones con equilibrio de fuerzas.
- Por construcción, el centroide del triángulo que se forma al unir los tres puntos de contacto resultantes de aplicar el método, coincide o está

próximo al centro de masa del objeto, lo que es un indicativo de que la prensión presenta una adecuada respuesta a fuerzas inerciales y gravitacionales durante el movimiento del robot [7][8][9] y a fuerzas y momentos externos aplicados sobre el objeto [10][11][12].

- No presenta procesos iterativos.
- Bajo coste computacional.

La técnica usa dos planos auxiliares perpendiculares entre sí donde se proyectan los conjuntos de caras a ser analizados y mediante simples razonamientos geométricos se determina: si un conjunto de caras permite realizar prensiones con equilibrio de fuerzas, una estimación del mejor conjunto de caras a ser contactado por los dedos, y el punto de contacto de cada dedo sobre el objeto.

Ponce et al. [7] mostró que las prensiones con equilibrio de fuerzas con cuatro puntos de contacto no-coplanares pueden ser clasificados en tres categorías: *concurrentes*, *flat-pencil* y *régulos*. Una prensión *concurrente* implica que las rectas de acción de las cuatro fuerzas de contacto intersectan en un punto. Una prensión *flat-pencil* implica que dos rectas de acción de dos fuerzas de contacto intersectan en un punto y las otras dos rectas de acción de las dos fuerzas de contacto restantes intersectan en otro punto. Una prensión *régulo* implica que las rectas de acción de las cuatro fuerzas de contacto no intersectan entre ellas. En los tres casos la fuerza y torque resultante debe ser nula a fin de obtener el equilibrio.

Ponce et al. [8] desarrolló una técnica para construir prensiones *concurrentes*, ellos determinan todos los conjuntos de cuatro caras cuyas orientaciones y posiciones relativas permiten este tipo de prensión, y entonces el conjunto de caras a ser contactado por los dedos es el que optimiza una función objetivo. Sin embargo el método no determina prensiones *flat-pencil* ni *régulos*. Sundang y Ponce [13] propusieron un método para la construcción de los tres tipos de prensiones no-coplanares pero asumen que las posiciones relativas de las caras a ser contactadas por los dedos permiten obtener prensiones *flat-pencil* y *régulos*. Yoshikawa [14] desarrolló un método para caracterizar las fuerzas internas para los tres tipos de prensiones no-coplanares considerando que los puntos de contacto son conocidos.

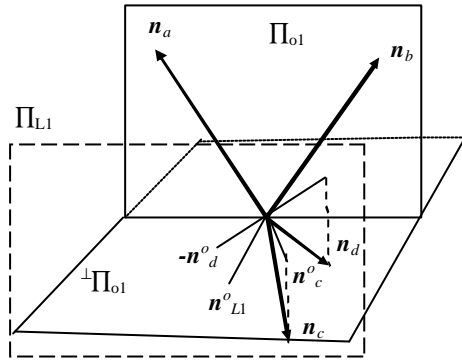


Figura 1. Planos auxiliares usados en el trabajo.

En este artículo, se propone un método para construir los tres tipos de prensiones no-coplanares. Primero se determinan todos los conjuntos de cuatro caras cuyas orientaciones y posiciones relativas permiten la existencia de prensiones *concurrentes*, *flat-pencil* ó *régulos*, segundo, de estos conjuntos se selecciona el que maximiza una función de calidad y, finalmente, sobre las caras seleccionadas se determinan los cuatro puntos de contacto que aseguran la condición de equilibrio de fuerzas para al menos un tipo de presión no-coplanar.

## II. ASUNCIONES Y NOMENCLATURA BÁSICA

Se consideran las siguientes asunciones:

- Sólo la punta de los dedos contacta con la superficie del objeto y el contacto es un punto;
- Cada dedo contacta con una cara diferente del objeto;
- El coeficiente de fricción  $m$  es constante.

Se usará la siguiente nomenclatura básica:

$A_k$ : Cara contactada por el dedo  $k$ ,  $k=a,b,c,d$ .

$P_k$ : Punto de contacto del dedo  $k$  sobre  $A_k$ .

$n_k$ : normal unitaria a  $A_k$  apuntando al interior del objeto.

$L_n$ : recta que contiene la proyección de  $n_k$  sobre el plano  $x$ - $y$  del sistema de referencia absoluto (se asume que  $L_{n_a}$  y  $L_{n_b}$  forman el menor ángulo entre cualesquiera dos  $L_{n_k}$ ).

$\Pi_{01}$ : plano determinado por  $n_a$  y  $n_b$  (Fig. 1).

$^\perp\Pi_{01}$ : plano perpendicular a  $\Pi_{01}$ .

$\Pi_{02}$ : plano determinado por  $n_c$  y  $n_d$ .

$^\perp\Pi_{02}$ : plano perpendicular a  $\Pi_{02}$ .

$n^o_i$ : proyección de  $n_i$  sobre  $^\perp\Pi_{02}$ ,  $i=a,b$ .

$n^o_j$ : proyección de  $n_j$  sobre  $^\perp\Pi_{01}$ ,  $j=c,d$ .

$n^o_{L1}$ : vector bisectriz del ángulo entre  $n^o_c$  y  $-n^o_d$ .

$n^o_{L2}$ : vector bisectriz del ángulo entre  $n^o_a$  y  $-n^o_b$ .

$\Pi_{L1}$ : plano perpendicular a  $n^o_{L1}$ .

$\Pi_{L2}$ : plano perpendicular a  $n^o_{L2}$ .

$\Pi_S$ : plano perpendicular a  $n_s = n^o_{L1} \times n^o_{L2}$ .

$c^s_m$ : proyección del centro de masas del objeto sobre  $\Pi_S$ .

$A^{L1}_i$ : proyección de  $A_i$  sobre  $i=a,b$ .

$A^{L2}_j$ : proyección de  $A_j$  sobre  $\Pi_{L2}$ ,  $j=c,d$ .

$n^{L1}_i$ : proyección de  $n_i$  sobre  $\Pi_{L1}$ ,  $i=a,b$ .

$n^{L2}_j$ : proyección de  $n_j$  sobre  $\Pi_{L2}$ ,  $j=c,d$ .

$\alpha = \tan^{-1} m$  semi-ángulo del cono de fricción.

## III. SELECCIÓN DE LOS POSIBLES CONJUNTOS DE CARAS A CONTACTAR

La selección de los conjuntos de cuatro caras que permiten prensiones no-coplanares con equilibrio de fuerzas se realiza en dos fases:

1) *Selección de caras de acuerdo a sus orientaciones relativas.* (de Ponce et al. [8]). Considérese cuatro vectores  $u_1, u_2, u_3, u_4$ , y los conos  $C_1, C_2, C_3, C_4$  de semiángulo  $\alpha$  centrados en ellos, los cuatro vectores expanden  $\alpha$ -positivamente  $\mathbf{R}^3$  cuando cualesquiera de los tres conos  $C_i, C_j, C_k$  están en el mismo semi-espacio, y  $-C_h$  está en el interior de la intersección de los triedros formados por todos los tripletes de vectores que pertenecen a  $C_i, C_j$  y  $C_k$  para  $i^1j^1k^1h$  y  $i,j,k,h \in \{1,2,3,4\}$ .

Una condición suficiente para que las orientaciones relativas de cuatro caras del objeto permitan el equilibrio de fuerzas es que los vectores normales a las caras expandan  $\alpha$ -positivamente  $\mathbf{R}^3$ . En esta fase, se seleccionan todos los conjuntos de cuatro caras cuyas orientaciones relativas cumplen con esta condición suficiente.

2) *Selección de caras de acuerdo a su posición.* En esta fase se seleccionan los conjuntos de caras (de los seleccionados en la fase previa) cuyas posiciones relativas permiten obtener al menos un tipo de presión no-coplanar. El proceso de selección para cada conjunto de cuatro caras es como sigue:

1. Sobre el plano  $\Pi_{L1}$  (Fig. 2a):

1.1. Calcular la intersección,  $R^{L1}$ , de dos regiones limitadas cada una por dos rectas paralelas que:

- Pasen a través de los vértices de cada  $A^{L1}_i$ ,  $i=a,b$ , cuyas componentes y son las máximas y las mínimas con respecto a un sistema de referencia  $\{x,y\}$  con el eje  $x$  paralelo a  $n^{L1}$ .
- Tener la dirección de  $n^{L1}_i$ ,  $i=a,b$ .

1.2. Trazar dos rayos,  $r_{ci}$ ,  $i=a,b$ , desde el centroide de  $R^{L1}$  con las direcciones de  $n^{L1}_i$ , respectivamente.

1.3. Calcular los segmentos  $A^{L1}_{vi} = A^{L1}_i \cap r_{cai}$ ,  $i=a,b$ .

1.4. Calcular la porción,  $A_{Lj}$ , de cada cara  $A_j$  tal que la proyección de  $A_{Lj}$  sobre  $\Pi_{L1}$  es igual a  $A^{L1}_{vi}$ .

2. Sobre el plano  $\Pi_{L2}$ :

Repetir los pasos 1.1 a 1.4 reemplazando  $A^{L1}_i$  por  $A^{L2}_j$ ,  $n^{L1}_i$  por  $n^{L2}_j$ , con  $i=a,b$  y  $j=c,d$ . Los elementos geométricos resultantes de cada etapa son identificados con el mismo nombre que en el plano  $\Pi_{L1}$  pero reemplazando los subíndices y supraíndices L1 por L2.

3. Sobre el plano  $\Pi_S$ :

3.1. Calcular los segmentos,  $A^s_i$  y  $A^s_j$ , resultantes de las proyecciones sobre  $\Pi_S$  de  $A_{Lj}$  y  $A_{Li}$  respectivamente,  $i=a,b$  y  $j=c,d$  (Fig. 2b).

3.2. Calcular las regiones,  $F_i$  y  $F_j$ , limitadas cada una por dos rectas paralelas que pasan por los puntos finales de  $A^s_i$  y  $A^s_j$  con dirección de  $n^o_{L2}$  y  $n^o_{L1}$  respectivamente.

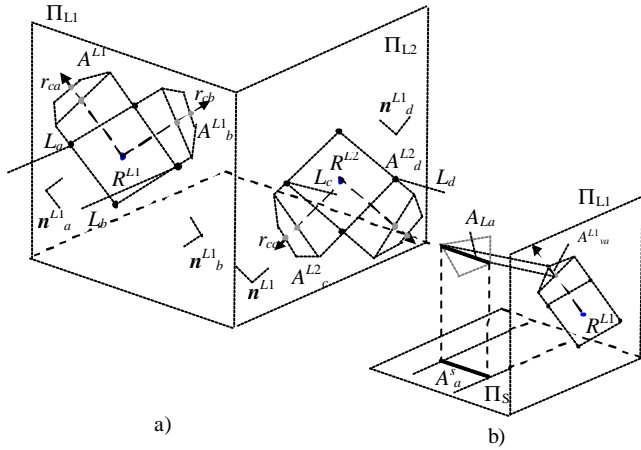


Figura 2. Selección de las caras de acuerdo a sus posiciones relativas; a) proyecciones sobre  $\Pi_{L1}$  y  $\Pi_{L2}$ ; b) determinación de  $A^s_a$ .

- 3.3. Trazar dos rectas,  $L_i$ ,  $i = a, b$ , perpendiculares a  $\Pi_{L1}$ , que pasen por los vértices de  $R^{L1}$  cuyas componentes  $x$  son las máximas y las mínimas con respecto a un sistema de referencia  $\{x, y\}$  con el eje  $x$  paralelo a  $\mathbf{n}^{L1}_1$ .
- 3.4. Calcular las regiones,  $F^{L1}$  y  $F^{L2}$ , limitadas cada una por las proyecciones sobre  $\Pi_S$  de  $L_i$ ,  $i = a, b$ , y  $L_j$ ,  $j = c, d$ , respectivamente.
- 3.5. Construir el casco convexo,  $C_{h1}$  y  $C_{h2}$ , de  $F^s_a \cap F^s_L$  y  $F^s_j \cap F^s_{L2}$  respectivamente (Fig. 3a).
- 3.6. Calcular la región  $C_{hT} = C_{h1} \cap C_{h2}$ . Si  $C_{hT} = F$  entonces el conjunto de caras es RECHAZADO (Fin del proceso).
- 3.7. Calcular  $F^s_T = (F^s_a \cap F^s_b) \cap (F^s_c \cap F^s_d) \cap C_{hT}$  (Fig. 3b):
  - Si  $F^s_T = F$  entonces el conjunto de caras es ACEPTADO (Fin del proceso).
  - Si  $F^s_T \neq F$  (i.e.  $F^s_a \cap F^s_b = F$  y/o  $F^s_c \cap F^s_d = F$ ) entonces:
    - Si  $F^s_c \cap F^s_d = F$  entonces recalculer  $F^s_a = F^s_a - (F^s_a \cap F^s_b)$  y  $F^s_b = F^s_b - (F^s_a \cap F^s_b)$ .
    - Si  $F^s_a \cap F^s_b = F$  entonces recalculer  $F^s_c = F^s_c - (F^s_c \cap F^s_d)$  y  $F^s_d = F^s_d - (F^s_c \cap F^s_d)$ .

Los conjuntos de caras que son aceptados en este paso permiten prensiones *flat-pencil*, pudiendo también permitir prensiones *concurrentes* (pero la existencia de este tipo de prensión no está garantizada).

- 3.8. Calcular el centroide,  $c_T$ , de  $C_{hT}$  (Fig. 3c).
- 3.9. Calcular las distancias,  $d_k$ , desde  $c_T$  a  $F^s_k$ ,  $k = a, b, c, d$ .
- 3.10. Calcular  $d_{\max} = \max(d_a, d_b, d_c, d_d)$ .
- 3.11. Calcular dos regiones,  $F^{C1}$  y  $F^{C2}$ , limitadas cada una por dos rectas paralelas a  $\mathbf{n}^{o_{L1}}$  y  $\mathbf{n}^{o_{L2}}$ , respectivamente, y a una distancia  $|d_{\max}|$  desde  $c_T$ .
- 3.12. Calcular  $F^{A_j} = F^s_j - (F^s_j \cap F^{C1})$  y  $F^{A_j} = F^s_j - (F^s_j \cap F^{C2})$ ,  $i = a, b$  y  $j = c, d$ . Si  $F^{A_k} = F$ ,  $k = a, b, c, d$ , entonces el conjunto de caras es RECHAZADO, en otro caso es ACEPTADO (Fin del proceso). Los conjuntos de caras que son aceptados en este paso sólo permiten prensiones *régulos*.

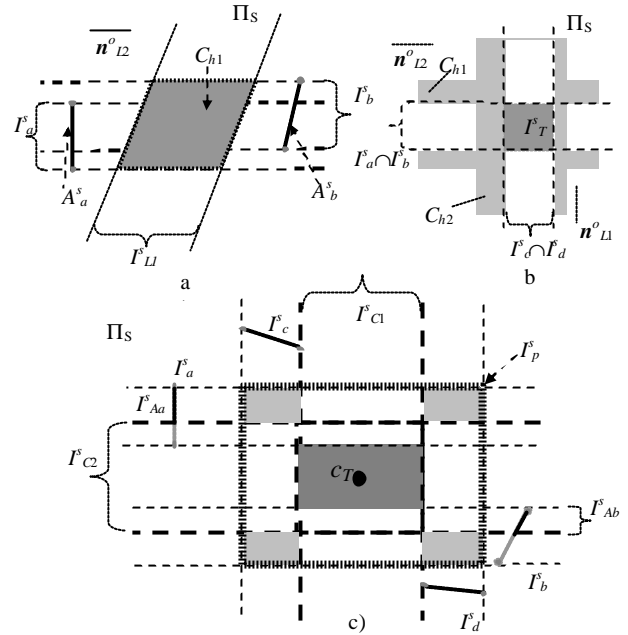


Figura 3. Selección de caras de acuerdo a su posición relativa; a) cálculo de  $C_{h1}$ ; b) conjunto de caras en el que  $F^s_T \neq F$ ; c) conjunto de caras en el que  $F^s_T = F$ .

La estimación de la calidad de cada conjunto de caras, presentada en la siguiente sección, requerirá una región auxiliar  $F^s_p$ . Para los conjuntos de caras aceptados en el paso 3.7  $F^s_p = F^s_T$ , y para los conjuntos de caras aceptados en el paso 3.12  $F^s_p = \text{Casco\_convexo}(F^{A_a} \cap F^{A_c}, F^{A_b} \cap F^{A_d}, F^{A_a} \cap F^{A_d}, F^{A_b} \cap F^{A_c})$ .

#### IV. ESTIMACIÓN DE LA CALIDAD DE LOS CONJUNTOS DE CARAS

En esta sección se propone una función para la evaluación de la calidad de los conjuntos de caras que han pasado la selección previa. La calidad es estimada considerando la posición relativa de las caras y su localización con respecto al centro de masa del objeto.

La función de calidad depende de si el conjunto de caras tiene  $F^s_T = F$  (conjunto de caras aceptado en el paso 3.7) o  $F^s_T \neq F$  (conjunto de caras aceptado en el paso 3.12). Los elementos  $S_p$ ,  $d_{s1}$  y  $d_{s2}$  involucrados en la función de calidad se obtienen como sigue:

Para conjuntos de caras con  $F^s_T \neq F$  (Fig. 4):

1. Calcular dos planos,  $\Pi_M$  y  $\Pi_N$ , perpendiculares a  $\Pi_S$  y paralelos respectivamente a  $\mathbf{n}^{o_{L1}}$  y  $\mathbf{n}^{o_{L2}}$ , que pasan por:
  - $c^s_m$  si  $c^s_m \in F^s_p$ .
  - el centroide,  $c^s_p$ , de  $F^s_p$  en otro caso.
2. Calcular las proyecciones,  $\mathbf{n}^N_i$ , de  $\mathbf{n}_i$  sobre  $\Pi_N$ ,  $i = a, b$ , y las proyecciones,  $\mathbf{n}^M_j$ , de  $\mathbf{n}_j$  sobre  $\Pi_M$ ,  $j = c, d$ .
3. Calcular los segmentos  $a_i = \Pi_N \cap A_i$ ,  $i = a, b$ , y  $a_j = \Pi_M \cap A_j$ ,  $j = c, d$ .
4. Calcular las regiones,  $R^n$  y  $R^m$ , en la misma forma que  $R^{L1}$ , (Sección III, paso 1.1) pero reemplazando  $\mathbf{n}^{L1}_i$  y  $\mathbf{n}^{L2}_j$  por  $\mathbf{n}^N_i$  y  $\mathbf{n}^M_j$ , y  $A^{L1}_i$  y  $A^{L2}_j$  por  $a_i$  y  $a_j$ , respectivamente.

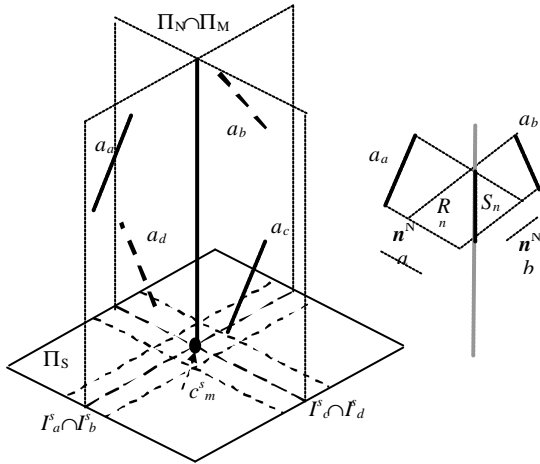


Figura 4. Entidades geométricas, sobre  $\Pi_N$  y  $\Pi_M$ , involucradas en la estimación de la calidad de un conjunto de caras en el que  $f_T \neq f$ .

5. Calcular  $S_n = R^n \cap \Pi_N \cap \Pi_M$  y  $S_m = R^m \cap \Pi_N \cap \Pi_M$ .
6. Entonces:
  - $S_p$  es el mínimo segmento que contiene a  $S_n$  y  $S_m$ .
  - $d_{s1}$  es la distancia desde  $c_p^s$  a  $c_m^s$ .
  - $d_{s2}$  es la distancia desde  $c_p^s$  a la intersección del contorno  $I_p^s$  con un rayo desde  $c_p^s$  que pasa por  $c_m^s$ .

Considérese  $S_T = S_n \cap S_m$ ; si  $S_T \neq f$  entonces es posible obtener presiones concurrentes, flat-pencil y régulos, si  $S_T = f$  entonces solamente es posible obtener presiones flat-pencil y régulos.

Para un conjunto con  $f_T = f$  (Fig.5):

1. Calcular la menor distancia,  $d_{bmin}$ , desde  $c_T$  a la recta ubicada en el medio de las dos rectas paralelas que son los límites de  $I_{A_k}^s$ , para  $k=a,b,c,d$  (paso 3.12).
2. Calcular cuatro planos perpendiculares a  $\Pi_S$ , cada uno a una distancia  $|d_{bmin}|$  desde  $c_T$ , dos de ellos ( $\Pi_{Na}$  y  $\Pi_{Nb}$ ) paralelos a  $n_{L1}^o$  y los otros dos ( $\Pi_{Mc}$  y  $\Pi_{Md}$ ) paralelos a  $n_{L2}^o$ .
3. Calcular los segmentos  $a_i = \Pi_{Ni} \cap A_i$ ,  $i=a,b$ , y  $a_j = \Pi_{Mj} \cap A_j$ ,  $j=c,d$ .
4. Calcular dos planos,  $\Pi_N$  y  $\Pi_M$ , perpendiculares a  $\Pi_S$ , que pasan por  $c_T$  y son paralelos a  $\Pi_{Ni}$  y  $\Pi_{Mj}$ , respectivamente.
5. Calcular las proyecciones,  $'a_i$ , de  $a_i$  sobre  $\Pi_N$ ,  $i=a,b$ , y las proyecciones,  $'a_j$ , de  $a_j$  sobre  $\Pi_M$ ,  $j=c,d$ .
6. Entonces, para  $f_T = f$ , los parámetros  $S_p$ ,  $d_{s1}$  y  $d_{s2}$  se calculan repitiendo los pasos 4 al 6 del procedimiento para  $f_T \neq f$ , pero reemplazando  $a_i$  y  $a_j$  por  $'a_i$  y  $'a_j$  respectivamente.

Por construcción, todos los elementos introducidos en esta sección son no nulos.

La siguiente función da una estimación de la calidad de un conjunto de caras retornando un valor en el rango  $[0,1]$  (siendo 1 el valor óptimo):

$$Q = \prod_{i=1}^3 q_i \quad (1)$$

con:

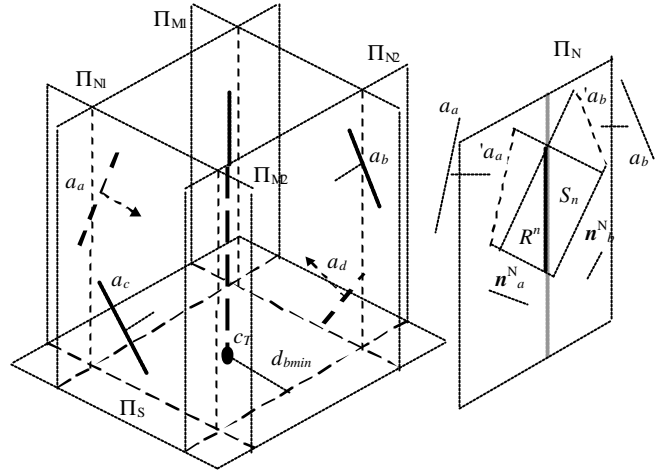


Figura 5. Entidades geométricas involucradas en la estimación de la calidad de un conjunto de caras en el que  $f_T = f$ .

$$q_1 = \begin{cases} \left| \frac{d_{s2} - d_{s1}}{d_{s2}} \right| & \text{si } c_m^s \in I_p^s \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases} \quad (2)$$

$q_1$  indica si  $c_m^s \in I_p^s$  y en tal caso cuan cercano esta  $c_m^s$  a  $c_p^s$ ,

$$q_2 = \left| \frac{I_p^s}{I_{pmax}^s} \right| \quad (3)$$

donde  $I_{pmax}^s$  es el máximo valor de  $I_p^s$  de entre todos los conjuntos de caras evaluados que permiten el equilibrio de fuerzas, y

$$q_3 = \left| \frac{S_p}{S_{pmax}} \right| \quad (4)$$

donde  $S_{pmax}$  es el máximo valor de  $S_p$  de entre todos los conjuntos de caras evaluados que permiten el equilibrio de fuerzas.

El conjunto de caras que maximiza  $Q$  es el seleccionado para la presión.

## V. DETERMINACIÓN DE LOS PUNTOS DE CONTACTO

La posición de cada punto de contacto  $P_k$  sobre la cara  $A_k$ , se selecciona sobre el segmento  $a_k$ ,  $k=a,b,c,d$ , siendo  $a_i = \Pi_N \cap A_i$ ,  $i=a,b$ , y  $a_j = \Pi_M \cap A_j$ ,  $j=c,d$ . Dado que las orientaciones de las cuatro caras  $A_k$  cumplen con la condición suficiente (Sección III), es siempre posible determinar sobre  $\Pi_N$  y  $\Pi_M$  una fuerza del cono de fricción de cada  $P_i$ ,  $i=a,b$ , y  $P_j$ ,  $j=c,d$ , respectivamente, tal que las cuatro fuerzas de contacto cumplan los requerimientos de al menos un tipo de presión no-coplanar. La determinación de los puntos de contacto depende del tipo de presión no-coplanar y se escribe en los siguientes apartados. A fin de evitar que los puntos de contacto estén sobre los bordes de las caras del objeto cada segmento  $a_k$  puede acortarse a fin de mantener una distancia de seguridad hasta el límite de la cara de contacto.

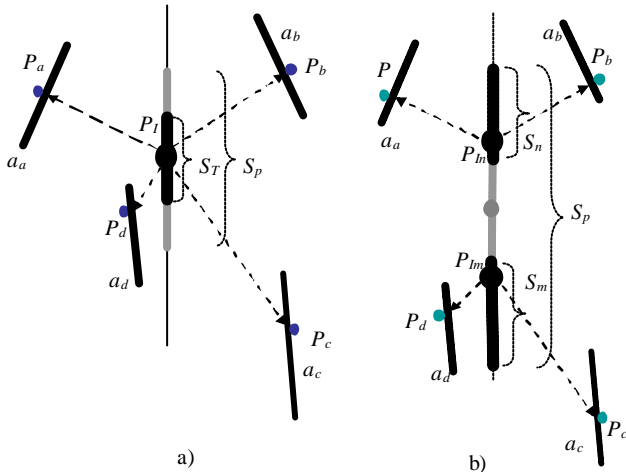


Figura 6. Ejemplo de: a) presión concurrente; b) presión flat-pencil.

#### Determinación de los puntos de contacto para presiones concurrentes (Fig. 6a)

- Calcular el punto medio,  $P_{tp}$ , de los segmentos cuyos extremos son los puntos medios de  $S_T$  y  $S_p$  (Sección IV).
- Calcular un punto  $P_l$  como:
  - Si  $P_{tp} \in S_T$  entonces  $P_l = P_{tp}$ .
  - Si  $P_{tp} \notin S_T$  entonces  $P_l$  es el extremo de  $S_T$  más cercano a  $P_{tp}$ .
- Trazar cuatro rayos desde  $P_l$  con las direcciones de  $\mathbf{n}_a^N$ ,  $\mathbf{n}_b^N$ ,  $\mathbf{n}_c^M$  y  $\mathbf{n}_d^M$ , los puntos de intersección de estos rayos con  $a_a$ ,  $a_b$ ,  $a_c$  y  $a_d$  determinan  $P_a$ ,  $P_b$ ,  $P_c$  y  $P_d$  respectivamente.

#### Determinación de los puntos de contacto para presiones flat-pencil (Fig. 6b)

- Dividir  $S_p$  en dos segmentos,  $S_{p1}$  y  $S_{p2}$ , a través de su punto medio.
- Calcular los puntos medios  $P_{pr}$  de  $S_{pr}$ ,  $r=1,2$ .
- Calcular un punto  $P_{lm}$  como:
  - Si  $P_{pr} \in S_m \forall r$  entonces  $P_{lm}$  es el punto  $P_{pr}$  que está más distante de los extremos de  $S_m$ .
  - Si  $P_{pr} \in S_m$  y  $P_{pq} \notin S_m$  entonces  $P_{lm} = P_{pr}$  para  $\{r,q\} = \{1,2\}$ .
  - Si  $P_{pr} \notin S_m \forall r$  entonces  $P_{lm}$  es el extremo de  $S_m$  más cercano a algún  $P_{pr}$ ,  $r=1,2$ .
- Calcular un punto  $P_{ln}$  como ( $r,q \in \{1,2\}$ ,  $r \neq q$ ):
  - Si  $P_{lm}$  está localizado en  $S_{pr}$  entonces
    - Si  $P_{pq} \in S_n$  entonces  $P_{ln} = P_{pq}$ .
    - Si  $P_{pq} \notin S_n$  entonces  $P_{ln}$  es el extremo de  $S_n$  más cercano a  $P_{pq}$ .
- Trazar cuatro rayos, dos de ellos desde  $P_{ln}$  con las direcciones de  $\mathbf{n}_a^N$  y  $\mathbf{n}_b^N$  respectivamente, y los otros dos desde  $P_{lm}$  con las direcciones de  $\mathbf{n}_c^M$  y  $\mathbf{n}_d^M$  respectivamente; los puntos de intersección de estos rayos con  $a_a$ ,  $a_b$ ,  $a_c$  y  $a_d$  determinan  $P_a$ ,  $P_b$ ,  $P_c$  y  $P_d$  respectivamente.

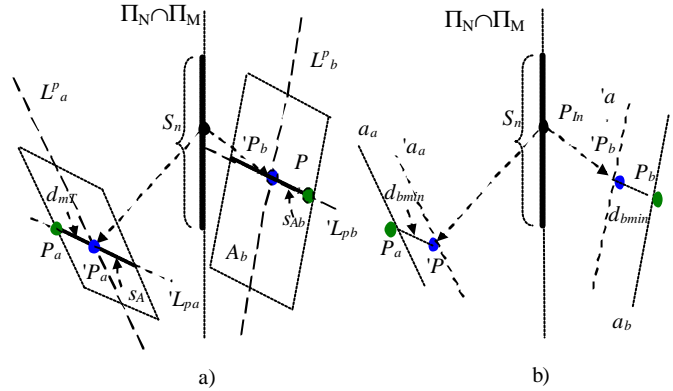


Figura 7. a) Determinación de una presión régulo: a) en un conjunto de caras en el que  $F_T \neq F$ ; b) en un conjunto de caras en el que  $F_T = F$ .

#### Determinación de los puntos de contacto para presiones régulos (Fig. 7)

La determinación de los puntos de contacto depende de si el conjunto de caras tiene un  $F_T \neq F$  (Sección III, paso 3.7) ó un  $F_T = F$  (Sección III, paso 3.12).

Para un conjunto de caras con  $F_T \neq F$  (Fig. 7a):

- Repetir todos los pasos descritos anteriormente para el caso de presiones flat-pencil. Ahora, sean  $'P_k = P_k$ ,  $k=a,b,c,d$ , los puntos obtenidos para el caso de una presión flat-pencil.
- Calcular la proyección,  $\mathbf{n}_s^{A_k}$ , de  $\mathbf{n}_s$  sobre  $A_k$ .
- Calcular la recta,  $L^p_k$ , sobre  $A_k$  con dirección de  $\mathbf{n}_s^{A_k}$  que pasa por  $'P_k$ .
- Calcular la recta,  $'L^p_k$ , sobre  $A_k$  perpendicular a  $L^p_k$  que pasa por  $'P_k$ .
- Calcular el segmento  $s_{Ak} = A_k \cap L^p_k$ .
- Calcular la menor distancia,  $d_{mk}$ , desde cada  $'P_k$  a los extremos de  $s_{Ak}$ ,  $k=a,b,c,d$ .
- Calcular  $d_{mT} = \min(d_{ma}, d_{mb}, d_{mc}, d_{md})$ .
- Calcular  $P_k$ :
  - $P_a$  y  $P_b$  están, respectivamente, sobre los segmentos  $s_{Aa}$  y  $s_{Ab}$  a una distancia  $d_{mT}$  de  $\Pi_N$  y en diferentes lados de  $\Pi_N$ .
  - $P_c$  y  $P_d$  están, respectivamente, sobre los segmentos  $s_{Ac}$  y  $s_{Ad}$  a una distancia  $d_{mT}$  desde  $\Pi_M$  y en diferentes lados de  $\Pi_M$ .

Para un conjunto de caras con  $F_T = F$  (Fig. 7b):

- Repetir todos los pasos descritos arriba para el caso de presiones flat-pencil pero reemplazando  $a_i$  y  $a_j$  por  $'a_i$  y  $'a_j$  (Sección IV) respectivamente. Ahora, sean  $'P_k = P_k$ ,  $k=a,b,c,d$ , los puntos de contacto obtenidos para el caso de una presión flat-pencil.
- Calcular  $P_k$ :
  - $P_a$  y  $P_b$  son las proyecciones de  $'P_a$  y  $'P_b$  sobre  $\Pi_{N1}$  y  $\Pi_{N2}$  respectivamente.
  - $P_c$  y  $P_d$  son las proyecciones de  $'P_c$  y  $'P_d$  sobre  $\Pi_{M1}$  y  $\Pi_{M2}$  respectivamente.

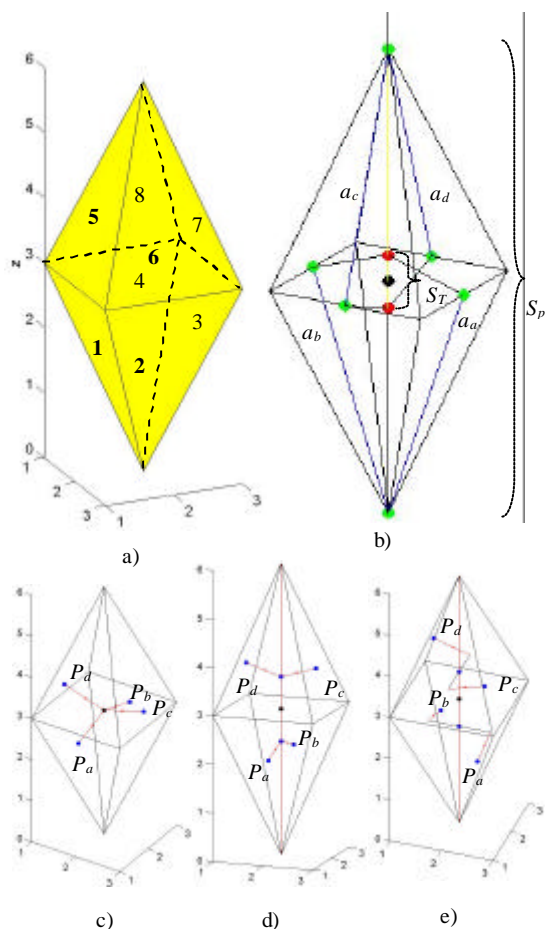


Figura 8. a) Objeto de 8 caras (los números en negrita indican las caras frontales y los números sin negrita indican las caras posteriores); b) conjunto {2,4,5,7} con  $S_T \neq F$ ; c) presión concurrente; d) presión flat-pencil; e) presión régulo.

## VI. EJEMPLOS NUMÉRICOS

En esta sección se muestran dos ejemplos numéricos. Los objetos usados en ambos ejemplos tienen la misma forma que los usados por Sudsang y Ponce [9]. Se asume un coeficiente de fricción  $m=0,3$ . El programa fue implementado en Matlab, Y ejecutado sobre un servidor INTEL Biprocesor Pentium III 1,4 GHz.

### A. Ejemplo 1

Debe determinarse una presión con equilibrio de fuerzas del objeto de 8 caras mostrado en la figura 8a.

*Selección del conjunto de caras de acuerdo a sus orientaciones.* Sólo las orientaciones relativas de los conjuntos de caras {1,3,6,8} y {2,4,5,7} cumplen la condición suficiente (Sección III).

*Selección del conjunto de caras de acuerdo a sus posiciones.* Ambos conjuntos, {1,3,6,8} y {2,4,5,7}, tienen  $F_T \neq F$  (Sección III, paso 3.7), entonces ambos conjuntos permiten obtener presi nes con equilibrio de fuerzas.

*Evaluación de la calidad de los conjuntos de caras.* Los dos conjuntos de caras tienen la misma calidad  $Q=1$ . El conjunto {2,4,5,7} es arbitrariamente seleccionado para la operación de la presión.

*Determinación de los puntos de contacto sobre cada cara.* El conjunto {2,4,5,7} tiene  $S_T \neq F$  (Sección IV), entonces es posible obtener los tres tipos de presi nes no-coplanares. Siguiendo el procedimiento descrito en la Sección V, las coordenadas absolutas  $[x \ y \ z]$  de los puntos de contacto son: para la presión concurrente  $P_a=[2 \ 1.1 \ 2.7]$ ,  $P_b=[2 \ 2.9 \ 2.7]$ ,  $P_c=[2.9 \ 2 \ 3.3]$  y  $P_d=[1.1 \ 2 \ 3.3]$ ; para la presión flat-pencil  $P_a=[2.7 \ 2 \ 3.8]$ ,  $P_b=[1.29 \ 2 \ 3.8]$ ,  $P_c=[2.5 \ 2 \ 4.5]$  y  $P_d=[1.5 \ 2 \ 4.5]$ ; y para la presión régulo (caso de  $F_T \neq F$ )  $P_a=[2.602 \ 1.3 \ 2.1]$ ,  $P_b=[1.4 \ 2.7 \ 2.1]$ ,  $P_c=[2.7 \ 1.4 \ 3.9]$  y  $P_d=[1.3 \ 2.6 \ 3.9]$ . El tiempo de cálculo para determinar los puntos de contacto para los tres tipos de presi nes no-coplanares fue 1.323s.

### B. Ejemplo 2

Debe determinarse una presión con equilibrio de fuerzas del objeto de 12 caras mostrado en la figura 9a.

*Selección del conjunto de caras de acuerdo a sus orientaciones.* Sólo las orientaciones relativas de los conjuntos de caras {1,3,10,12} y {2,4,9,11} cumplen la condición suficiente (Sección III).

*Selección del conjunto de caras de acuerdo a sus posiciones.* Ambos conjuntos, {1,3,10,12} y {2,4,9,11}, tienen  $F_T \neq F$  (Sección III, paso 3.7) entonces ambos conjuntos permiten obtener presi nes con equilibrio de fuerzas.

*Evaluación de la calidad de los conjuntos de caras.* Los dos conjuntos de caras tienen la misma calidad  $Q=1$ . El conjunto {1,3,10,12} es arbitrariamente seleccionado para la operación de la presión.

*Determinación de los puntos de contacto sobre cada cara.* El conjunto {2,4,5,7} tiene  $S_T = F$  (Sección IV), entonces es posible obtener sólo dos tipos de presi nes no-coplanares. Siguiendo el procedimiento descrito en la sección V, las coordenadas absolutas  $[x \ y \ z]$  de los puntos de contacto son: para la presión concurrente  $P_a=[2 \ 1.1 \ 2.7]$ ,  $P_b=[2 \ 2.9 \ 2.7]$ ,  $P_c=[2.9 \ 2 \ 8.3]$  y  $P_d=[1.1 \ 2 \ 8.3]$ ; y para la presión régulo  $P_a=[2.7 \ 1.1 \ 2.7]$ ,  $P_b=[1.3 \ 2.9 \ 2.7]$ ,  $P_c=[2.9 \ 1.3 \ 8.3]$  y  $P_d=[1.1 \ 2.7 \ 8.3]$ . El tiempo de cálculo para determinar los puntos de contacto para los dos tipos de presi nes no-coplanares fue 0,992s.

## CONCLUSIÓN

El método heurístico presentado en este artículo permite la construcción de los tres tipos de presi nes no-coplanares: concurrente, flat-pencil y régulo. Como primer paso, se determinan todos los conjuntos de cuatro caras cuyas orientaciones relativas cumplen con la

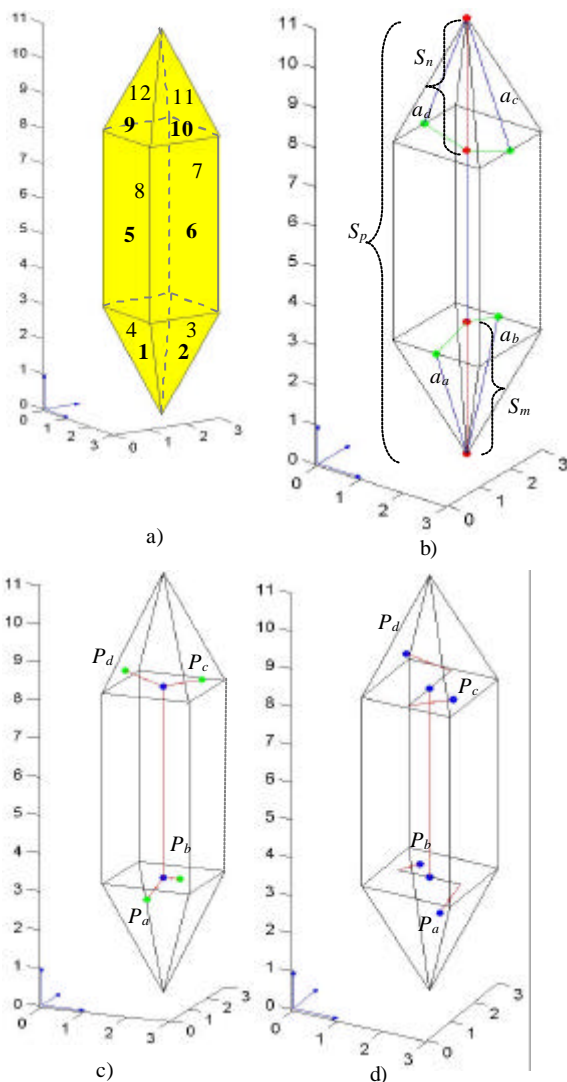


Figura 9. a) Objeto de 12 caras (los números en negrita indican las caras frontales y los números sin negrita indican las caras posteriores); b) conjunto  $\{1,3,10,12\}$  con  $S_r=f$ ; c) prensión *flat-pencil*; d) prensión *régulo*.

condición suficiente y sus posiciones relativas permiten que fuerzas de contacto aplicadas por los dedos produzcan al menos un tipo de prensión no-coplanar. De entre estos conjuntos de caras se selecciona el que maximiza una función de calidad. Entonces, sobre las caras del conjunto seleccionado y de acuerdo al tipo de prensión no-coplanar de que se trate, se determinan los cuatro puntos de contacto que aseguran una prensión con equilibrio de fuerzas. El método se basa en el uso de tres planos auxiliares donde se proyectan las caras a ser analizadas. Usando simples razonamientos geométricos se determina: si un conjunto de caras permite realizar prensiones no-coplanares con equilibrio de fuerzas, el tipo de prensión no-coplanar que puede ser obtenido en cada conjunto de caras, una estimación del mejor conjunto de caras para realizar la prensión, y los puntos de contacto de cada dedo sobre el objeto.

## REFERENCIAS

- [1] A. Bicchi y V. Kumar, "Robotic grasping and contact: Review," Proc. IEEE Int. Conf. on Robotics and Automation, pp. 348-353, 2001.
- [2] Y. Chen, I. Walter, y B. Cheatham, "Visualization of force-closure grasps for objects through contact force decomposition," IEEE Int. Journal of Robotics Research, **14**, No. 1, pp. 37-75, 1995.
- [3] Y. Liu, D. Ding, y S. Wang, "Constructing 3D frictional form-closure grasps of polyhedral objects," Proc. IEEE Int. Conf. on Robotics and Automation, pp. 1904-1909, 1999.
- [4] B. Mirtich, y J. Canny, "Easily computable optimum grasps in 2-D and 3-D," Proc. IEEE Int. Conf. on Robotics and Automation, pp. 739-746, 1994.
- [5] N. Nguyen, "Constructing force-closure grasps" Int. Journal of Robotics Research, **7**, No.3, pp. 345-362, 1988.
- [6] R. Prado y R. Suarez, "Heuristic approach construct 3-finger force-closure grasp for polyhedral objects". *Prep. 7<sup>th</sup> IFAC Symposium on Robot Control, SYROCO*, pp.387-392, 2003.
- [7] J. Ponce, S. Sullivan, D. Boissonnat y J. Merlet, "On Characterizing and Computing Three- and Four-Finger Force-Closure Grasp Polyhedral Objects," Proc. IEEE Int. Conf. on Robotics and Automation, pp. 821-827, 1993.
- [8] J. Ponce, S. Sullivan, A. Sudsang, D. Boissonnat y J. Merlet, "On Computing Four-Finger Equilibrium and Force-Closure Grasps of Polyhedral Objects" Int. Journal of Robotics Research, **16**, No.1, pp. 11-30, 1997.
- [9] Y. Liu y S. Wang, "Qualitative Test and Force Optimization of 3-D Frictional Form-Closure Grasp Using Linear Programming". *Trans. on Robotics and Automation Vol. 15, No. 1, February 2000*.
- [10] C. Ferrari y J. Canny, "Planning Optimal Grasps", IEEE Int. Conf. on Robotics and Automation, Nice, France, pp. 2290-2295, 1992.
- [11] Y. Zhang, F. Gao, Y. Zhang y W. Gruver, "Evaluating the Quality of Grasp Configurations for Dexterous". *Proc. IEEE Int. Conf. Robotics and Automation, San Francisco* pp. 100-105, 1997.
- [12] Q. Lin, J. Burdick y E. Rimon, "A stiffness-Based Quality Measure for Compliant Grasp and Fixtures", *Trans. on Robotics and Automation Vol. 16, No. 6, December 2000*.
- [13] A. Sudsang, y J. Ponce, "New techniques for computing four-finger force-closure grasps of polyhedral objects," Proc. IEEE Int. Conf. on Robotics and Automation, pp. 1355-1360, 1995.
- [14] T. Yoshikawa, "Virtual truss model for characterization of internal forces for multiple finger grasps," Proc. IEEE Int. Conf. on Robotics and Automation, pp. 2389-2395, 1998.