

# Determinación de una configuración óptima de una mano mecánica para la prensión de un paralelepípedo rectangular

Gerrit Färber Raúl Suárez

Institut d'Organització i Control de Sistemes Industrials (IOC-UPC)  
Av. Diagonal 647 Planta 11, 08028 Barcelona, España  
E-mails: gerrit\_faerber@gmx.de, raul.suarez@upc.es

**Resumen**— Este trabajo describe un método para la determinación de una configuración óptima de una mano mecánica para realizar la prensión de un paralelepípedo. El método propuesto determina una solución para el dedo corazón junto con el pulgar y, como consecuencia, la posición de la muñeca. Después, basándonos en esta configuración se colocan los dedos índice y anular. La función objetivo considerada da soluciones tendiendo a mantener los ángulos de las articulaciones cerca de la mitad de su rango activo. La técnica propuesta se aplica a la mano mecánica MA-I, diseñada y construida en el 'Institut d'Organització i Control de Sistemes Industrials' (IOC) de la UPC. Esta mano consiste en una palma rígida y cuatro dedos, con forma antropomórfica aunque más grande que una mano humana.

**Palabras clave**— mano mecánica, cinemática inversa

## I. INTRODUCCIÓN

La prensión de un objeto realizada por una mano mecánica está sujeta a varias consideraciones, como destreza, equilibrio, estabilidad y comportamiento dinámico [1]. Estas consideraciones dependen de la cinemática de la mano mecánica. La cinemática de una mano mecánica con forma antropomórfica tiene la ventaja de tener grados de libertad redundantes. Esto, sin embargo, tiene el inconveniente de permitir infinitas soluciones, especialmente cuando la muñeca puede ser posicionada sin restricciones y por lo tanto hacer más difícil la búsqueda de soluciones óptimas.

Frecuentemente, la resolución del problema de prensión se centra en el objeto sin considerar la mano mecánica. Esto puede dar como resultado puntos de contacto excelentes que aseguran una prensión robusta, pero las limitaciones impuestas por la cinemática de una mano dada pueden imposibilitar la realización de tal prensión con la mano dada.

El presente trabajo se enfoca en la determinación de la cinemática inversa de una mano mecánica para la prensión de un paralelepípedo rectangular. Se asume que los puntos de contacto están colocados en un plano que corta objeto y es paralelo a la cara de su base. Un

esquema simplificado de la mano realizando la prensión de un objeto se puede ver la Fig. 1 (se muestran sólo dos dedos). Con estos puntos de contacto, utilizando un método heurístico, se coloca la mano cerca del objeto. Este método heurístico no necesariamente define una solución posible (la solución de alguna articulación puede estar fuera de su rango), pero define una solución inicial aproximada, basada en ésta se aplica una búsqueda para encontrar la configuración óptima de la mano de cara a la prensión. La búsqueda usa una función objetivo para calcular la calidad de la configuración. Esta función objetivo favorece soluciones en que los ángulos de las articulaciones permanecen cerca de la mitad de su rango. Asimismo penaliza firmemente ángulos que estén fuera de su rango y que resultarían en una configuración imposible de la mano. La función objetivo finalmente lleva a la configuración óptima de la mano, que permite el mayor rango de movimiento de las articulaciones.

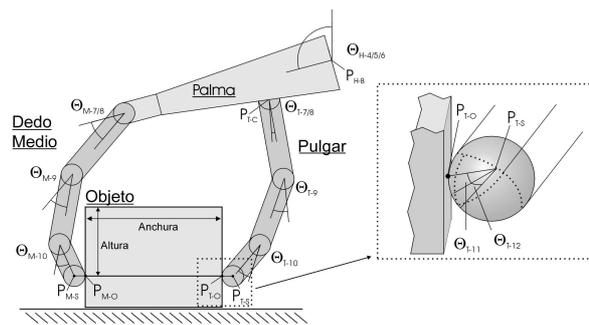


Figura 1. Esquema de la mano realizando la prensión de un objeto, definido por su altura y anchura. La imagen pequeña muestra las dos articulaciones virtuales en la última falange del dedo.

En el caso de que el objeto tenga una altura pequeña, el algoritmo encuentra una configuración que es generosa con respecto a la altura y permitiría al objeto entrar más en la mano. En otros casos, en que la altura del objeto es relativamente grande, la búsqueda lleva a soluciones que cumplan la altura deseada y, como consecuencia, la calidad de la configuración obtenida será peor, ocupando configuraciones más extremas.

## II. DESCRIPCIÓN DE LA MANO

La mano consiste en: muñeca, palma, pulgar y los dedos índice, corazón y anular. Está montada en un brazo de un robot con seis grados de libertad (Stäubli RX90). Para especificar la posición de la mano independientemente del brazo que la soporta, se considera que la posición,  $P_{H-B}$ , de la mano se determina por tres parámetros  $X_{H-B}$ ,  $Y_{H-B}$  y  $Z_{H-B}$  y la orientación de la mano se determina por tres articulaciones virtuales  $\Theta_{H-4}$ ,  $\Theta_{H-5}$  y  $\Theta_{H-6}$ . Los valores  $X_{H-B}$ ,  $Y_{H-B}$ ,  $Z_{H-B}$  y  $\Theta_{H-4}$ ,  $\Theta_{H-5}$  y  $\Theta_{H-6}$  describen la configuración de la muñeca del robot y se obtienen a partir de las seis articulaciones reales del brazo del robot. Las articulaciones  $\Theta_{F-7}$  a  $\Theta_{F-10}$  definen los ángulos de las falanges rígidas de los dedos ( $\Theta_{F-7}$  representa el movimiento de abducción-adducción). Las articulaciones  $\Theta_{F-11}$  hasta  $\Theta_{F-13}$  son articulaciones virtuales que describen la posición del punto de contacto en la punta esférica de cada dedo (Fig. 1). En el apéndice se encuentra los parámetros de Denavit-Hartenberg [2] de la mano MA-I [3].

En este documento se usa la siguiente nomenclatura para los subíndices:

$H$	Mano	(Hand)
$F$	Dedo	(Finger)
	(específicamente: T, I, R, M)	
$T$	Pulgar	(Thumb)
$I$	Dedo índice	(Index finger)
$R$	Dedo corazón	(Ring finger)
$M$	Dedo anular	(Middle finger)

Además se usa la siguiente nomenclatura (las posiciones se definen en un sistema de referencia absoluto, a no ser que se indique lo contrario):

$P_{F-O}$	Posición del punto de contacto dedo-objeto
$P_{F-S}^i$	Posición de la articulación $i$ del dedo $F$
$P_{F-S}$	Posición del centro de la esfera en la punta de la última falange del dedo $F$ ( $P_{F-S}^{10}$ )
$P_{F-C}$	Posición de la conexión dedo-palma
$P_{H-B}$	Posición de la base de la mano
$\Theta_{F-i}$	Ángulo de la articulación $i$ del dedo $F$
$D_{TS-MS}$	Distancia entre $P_{T-S}$ y $P_{M-S}$ .
$D_{TC-MS}$	Distancia entre $P_{T-C}$ y $P_{M-S}$ .
$D_{TC-TS}$	Distancia entre $P_{T-C}$ y $P_{T-S}$ .
$X_F, Y_F, Z_F$	Posición de $P_{F-S}$ con $\Theta_{H-4}$ hasta $\Theta_{H-6}$ igual 0. (Posición local de $P_{F-S}$ con respecto a $P_{H-B}$ )

La cadena cinemática de  $P_{T-O}$  hasta  $P_{M-O}$  se puede dividir en dos cadenas individuales. La primera cadena está formada por el dedo corazón junto con la palma de la mano y la segunda cadena está formada por el pulgar. El punto en común de las dos cadenas,  $P_{T-C}$ , es el punto donde se conecta el pulgar con la palma de la mano.  $P_{T-C}$  sirve como punto auxiliar de referencia de la mano.

## III. SOLUCIÓN DE LA CINEMÁTICA INVERSA DE LA MANO

La determinación de la configuración de la palma de la mano y de los dedos para aprehender un paralelepípedo rectangular, se describe en las siguientes fases:

1. *Determinación de la configuración óptima de la mano con el dedo corazón y el pulgar.* Incluye la determinación de:
  - A. Posición inicial de  $P_{T-C}$  (Método heurístico).
  - B. Cinemática inversa del dedo corazón y del pulgar.
  - C. Orientación y posición de la muñeca.
  - D. Cinemática inversa del pulgar.
  - E. Orientación del pulgar (ángulos  $\Theta_{T-7}$  y  $\Theta_{T-8}$ )
  - F. Ángulos en las puntas del dedo corazón y pulgar (ángulos  $\Theta_{F-11}$  y  $\Theta_{F-12}$ )
  - G. Posición de la base de la mano  $P_{H-B}$ .
2. *Extensión a cuatro dedos.* Incluye la determinación de:
  - H. Configuración de los dedos corazón y anular.
3. *Aplicación de la búsqueda guiada de la posición 'óptima' de  $P_{T-C}$ .* Incluye la determinación de (la calidad se evalúa según la función objetivo):
  - I. Calidad de la prensión.
  - J. Calidad de las articulaciones de la mano (sin puntas de los dedos).
  - K. Calidad de las articulaciones de las puntas de los dedos.
  - L. Calidad de la altura admitida del objeto.
  - M. Configuración óptima mediante una búsqueda guiada.

En las siguientes subsecciones se explican los pasos del método propuesto (en [4] se encuentran más detalles sobre la derivación de las ecuaciones).

### A. Posición inicial de $P_{T-C}$ (Método heurístico)

El punto inicial  $P_{T-C}$  asegura que las distancias  $D_{TC-MS}$  y  $D_{TC-TS}$  no excedan su valor máximo. Además, la ventaja de usar este punto es la reducción del tiempo de cálculo de la subsiguiente búsqueda.

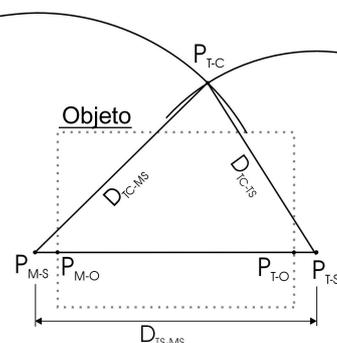


Figura 2. Determinación de la posición inicial de  $P_{T-C}$ .

Sin embargo, el método heurístico no tiene en cuenta los rangos de los ángulos y por lo tanto puede encontrar un  $P_{T-C}$  inicial que no permita la solución de todas articulaciones con respecto a sus rangos. (es muy probable que  $\Theta_{T-7}$  esté fuera de su rango).

Con la anchura del objeto se determinan las posiciones de  $P_{M-O}$  y  $P_{T-O}$ , y se obtienen  $P_{M-S}$  y  $P_{T-S}$  directamente (Fig. 1). La posición inicial de  $P_{T-C}$  (Fig. 2) se determina mediante la intersección de dos círculos de radio  $D_{TC-MS}$  y  $D_{TC-TS}$ , centrados en  $P_{M-S}$  y  $P_{T-S}$  respectivamente:

$$D_{TC-TS} = \frac{MAX(D_{TC-TS})}{2} + \left( MAX(D_{TC-TS}) - \frac{MAX(D_{TC-TS})}{2} \right) \cdot \frac{D_{TS-MS}}{MAX(D_{TC-TS}) + MAX(D_{TC-MS})}$$

$$D_{TC-MS} = \frac{MAX(D_{TC-MS})}{2} + \left( MAX(D_{TC-MS}) - \frac{MAX(D_{TC-MS})}{2} \right) \cdot \frac{D_{TS-MS}}{MAX(D_{TC-TS}) + MAX(D_{TC-MS})}$$

donde  $MAX\{D_{TC-MS}\}$  y  $MAX\{D_{TC-TS}\}$  son las longitudes máximas de las cadenas cinemáticas del dedo corazón y el pulgar, respectivamente. Debido a la diferencia entre  $MAX\{D_{TC-TS}\}$  y  $MAX\{D_{TC-MS}\}$  de la mano MA-I, un valor pequeño de  $D_{TS-MS}$  no permitiría la intersección de los dos círculos. En este caso se ajusta  $D_{TC-MS}$  para que se pueda aplicar:

$$D_{TC-MS} = \frac{MAX(D_{TC-TS})}{2} + \left( MAX(D_{TC-MS}) - \frac{MAX(D_{TC-TS})}{2} \right) \cdot \frac{D_{TS-MS}}{MAX(D_{TC-TS}) + MAX(D_{TC-MS})}$$

### B. Cinemática inversa del dedo corazón y el pulgar

Para conseguir una solución posible se considera para el dedo corazón

$$\Theta_{M-7} = 0$$

mientras se tienen que determinar los valores adecuados de  $\Theta_{T-7}$ ,  $\Theta_{I-7}$  y  $\Theta_{R-7}$  para los demás dedos. Se puede determinar la configuración de la palma de la mano y de los dedos en función de la distancia entre  $P_{T-C}$  y los puntos  $P_{T-S}$  y  $P_{M-S}$ . Los ángulos  $\Theta_{M-8}$ ,  $\Theta_{M-9}$  y  $\Theta_{M-10}$  son coplanares y permiten infinitas soluciones. Antes se determinará el ángulo  $\Theta_{M-8}$ .

Se puede determinar la posición de  $P_{M-S}$  utilizando la cinemática del dedo corazón de la mano MA-I, resultando:

$$X = 33.62 \cdot \sin(\Theta_{M-8}) \cdot \cos(\Theta_{M-9}) \cdot \cos(\Theta_{M-10}) + 33.62 \cdot \cos(\Theta_{M-8}) \cdot \sin(\Theta_{M-9}) \cdot \cos(\Theta_{M-10}) + 33.62 \cdot \cos(\Theta_{M-8}) \cdot \cos(\Theta_{M-9}) \cdot \sin(\Theta_{M-10}) - 33.62 \cdot \sin(\Theta_{M-8}) \cdot \sin(\Theta_{M-9}) \cdot \sin(\Theta_{M-10}) + 56 \cdot \sin(\Theta_{M-8}) \cdot \cos(\Theta_{M-9}) + 56 \cdot \cos(\Theta_{M-8}) \cdot \sin(\Theta_{M-9}) + 76.66 \cdot \sin(\Theta_{M-8}) + 9.5$$

$$Y = 0$$

$$Z = 33.62 \cdot \cos(\Theta_{M-8}) \cdot \cos(\Theta_{M-9}) \cdot \cos(\Theta_{M-10}) - 33.62 \cdot \cos(\Theta_{M-8}) \cdot \sin(\Theta_{M-9}) \cdot \cos(\Theta_{M-10}) - 33.62 \cdot \cos(\Theta_{M-8}) \cdot \sin(\Theta_{M-9}) \cdot \sin(\Theta_{M-10}) + 56 \cdot \cos(\Theta_{M-8}) \cdot \cos(\Theta_{M-9}) - 56 \cdot \sin(\Theta_{M-8}) \cdot \sin(\Theta_{M-9}) + 76.66 \cdot \cos(\Theta_{M-8}) + 276.55$$

La distancia euclidiana entre  $P_{T-C}$  y  $P_{M-S}$ , considerando, de momento, que  $\Theta_{M-9}$  y  $\Theta_{M-10}$  son iguales a  $\Theta_{M-8}$  se puede obtener la ecuación anterior reemplazando  $\Theta_{M-9}$  y  $\Theta_{M-10}$  por  $\Theta_{M-8}$ , y resulta:

$$D_{TC-MS}^2 = 100 \cdot (-0.8248 \cdot \cos^2(\Theta_{M-8}) \cdot \sin(\Theta_{M-8}) - 0.687 \cdot \cos(\Theta_{M-8}) \cdot \sin(\Theta_{M-8}) + 3.96 \cdot \cos^2(\Theta_{M-8}) + 3.516 \cdot \cos(\Theta_{M-8}) - 0.264 \cdot \sin(\Theta_{M-8}) + 0.602 \cdot \cos(\Theta_{M-8}) + 0.9279)$$

De esta expresión debería obtenerse  $\Theta_{M-8}$ . Debido a la dificultad de invertir esta función, se la aproxima con

una función polinomial de grado cinco con un error máximo de  $0.6^\circ$  quedando:

$$\Theta_{M-8} = -0.002 \cdot D^5 + 0.0676 \cdot D^4 - 0.8896 \cdot D^3 + 5.6392 \cdot D^2 - 22.144 \cdot D + 100.48$$

con  $D = (D_{TC-MS} - 84)/18 + 1$ . También se puede obtener  $\Theta_{M-8}$  utilizando el método iterativo de Newton. Sin embargo, esto requiere una serie de cálculos iterativos adicionales. Con la cinemática del dedo corazón, el ángulo  $\Theta_{M-8}$  ya determinado y con  $\Theta_{M-9}$  y  $\Theta_{M-10}$  ajustados al valor de  $\Theta_{M-8}$ , es posible calcular la posición de  $P_{M-S}|_{\Theta_{H-4}=\Theta_{H-5}=0}$ . Debido al error de aproximación en  $\Theta_{M-8}$  esto resultaría en una distancia incorrecta entre  $P_{T-C}$  y  $P_{M-S}$ . Para asegurar la exacta distancia  $D_{TC-MS}$ , se calcula el punto  $P_{M-S}|_{\Theta_{H-4}=\Theta_{H-5}=0}$ :

$$X_M = 134.48 \cdot \cos^3(\Theta_{M-8}) + 112 \cdot \cos^2(\Theta_{M-8}) - 24.2 \cdot \cos(\Theta_{M-8}) - 56$$

$$Y_M = 0$$

$$Z_M = \sqrt{D_{TC-MS}^2 - X_M^2}$$

Una vez la articulación  $\Theta_{M-8}$  y el punto  $P_{M-S}|_{\Theta_{H-4}=\Theta_{H-5}=0}$  están determinados, se puede resolver mediante conversiones trigonométricas la cinemática inversa para  $\Theta_{M-9}$  y  $\Theta_{M-10}$  del dedo corazón:

$$\Theta_{M-9} = \begin{cases} \pi - \arcsin\left(-\frac{b}{a}\right) - \Theta_{M-8} - \arctan\left(\frac{a_1}{a_2}\right) & \text{if } a_1 \geq 0 \text{ and } a_2 \geq 0 \\ -\pi - \arcsin\left(-\frac{b}{a}\right) - \Theta_{M-8} - \arctan\left(\frac{a_1}{a_2}\right) & \text{if } a_1 \geq 0 \text{ and } a_2 < 0 \\ \arcsin\left(-\frac{b}{a}\right) - \Theta_{M-8} - \arctan\left(\frac{a_1}{a_2}\right) & \text{if } a_1 < 0 \end{cases}$$

$$\Theta_{M-10} = \arctan\left(\frac{X_M - 56 \cdot \sin(\Theta_{M-8}) + \Theta_{M-9} - 76.66 \cdot \sin(\Theta_{M-8}) - 9.5}{Z_M - 56 \cdot \cos(\Theta_{M-8}) + \Theta_{M-9} - 76.66 \cdot \cos(\Theta_{M-8}) - 276.55}\right) - \Theta_{M-8} - \Theta_{M-9}$$

con

$$a_1 = 2 \cdot 9.5 \cdot 56 + 2 \cdot 56 \cdot 76.66 \cdot \sin(\Theta_{M-8}) - 2 \cdot 56 \cdot X_M$$

$$a_2 = 2 \cdot 276.55 \cdot 56 + 2 \cdot 56 \cdot 76.66 \cdot \cos(\Theta_{M-8}) - 2 \cdot 56 \cdot Z_M$$

$$a = \sqrt{a_1^2 + a_2^2}$$

$$b = Z_M^2 + X_M^2 - 2 \cdot 276.55 \cdot 56 - 2 \cdot 9.5 \cdot X_M - 2 \cdot 76.66 \cdot (Z_M \cdot \cos(\Theta_{M-8}) + X_M \cdot \sin(\Theta_{M-8})) + 2 \cdot 76.66 \cdot 276.55 \cdot \cos(\Theta_{M-8}) + 2 \cdot 76.66 \cdot 9.5 \cdot \sin(\Theta_{M-8}) + 84452.6037$$

### C. Orientación y posición de la muñeca

El siguiente paso es la determinación de  $\Theta_{H-4}$  y  $\Theta_{H-5}$  para la ubicación actual de  $P_{T-C}$  tal que se encuentre la posición final de  $P_{M-S}$  según los requerimientos del objeto. Los datos conocidos son  $|P_{M-S} - P_{T-C}| = D_{TC-MS}$ ,  $P_{M-S}$ ,  $P_{T-C}$ ,  $X_M$ ,  $Y_M$ ,  $Z_M$  ( $P_{M-S}|_{\Theta_{H-4}=\Theta_{H-5}=0}$ ).

Entonces se obtiene  $\Theta_{H-4}$  y  $\Theta_{H-5}$  resolviendo el sistema:

$$(P_{M-S} - P_{T-C}) = R_{\Theta_{H-4}} \cdot R_{\Theta_{H-5}} \cdot (P_{M-S}|_{\Theta_{H-4}=\Theta_{H-5}=0} - P_{T-C})$$

siendo  $R_{\Theta_{H-4}}$  y  $R_{\Theta_{H-5}}$  las matrices de rotación de los ejes  $\Theta_{H-4}$  y  $\Theta_{H-5}$ . Los resultados son:

$$\Theta_{H-4} = \arccos\left(\frac{P_{M-S}(z) - P_{T-C}(z)}{\sqrt{Z_M^2 + X_M^2}}\right) - \arctan\left(\frac{X_M}{Z_M}\right)$$

$$\Theta_{H-5} = \arcsin\left(\frac{(P_{M-S}(x) - P_{T-C}(x)) \cdot Y_M + (P_{M-S}(y) - P_{T-C}(y)) \cdot m}{m^2 + Y_M^2}\right)$$

con:

$$m = X_M \cdot \cos(\Theta_{H-4}) + Z_M \cdot \sin(\Theta_{H-4})$$

$$P_{M-S}(\alpha), P_{T-C}(\alpha) \mid \alpha \in \{x, y, z\}$$

#### D. Cinemática inversa del pulgar

Se obtiene la solución de los tres ángulos  $\Theta_{T-8}$ ,  $\Theta_{T-9}$  y  $\Theta_{T-10}$  de la misma manera que en el caso del dedo corazón. El resultado es:

$$\Theta_{T-8} = -0.018 \cdot D^5 + 0.341 \cdot D^4 - 2.4576 \cdot D^3 + 8.075 \cdot D^2 - 20.181 \cdot D + 104.18$$

con  $D = (D_{TC-TS} - 84) / 18 + I$ ,

$$\Theta_{T-9} = \begin{cases} \pi - \arcsin\left(\frac{a}{a_1}\right) - \Theta_{T-8} - \arctan\left(\frac{a_2}{a_1}\right) & \text{if } a_1 \geq 0 \text{ and } a_2 \geq 0 \\ -\pi - \arcsin\left(-\frac{a}{a_1}\right) - \Theta_{T-8} - \arctan\left(\frac{a_2}{a_1}\right) & \text{if } a_1 \geq 0 \text{ and } a_2 < 0 \\ -\arcsin\left(\frac{a}{a_1}\right) - \Theta_{T-8} - \arctan\left(\frac{a_2}{a_1}\right) & \text{if } a_1 < 0 \end{cases}$$

$$\Theta_{T-10} = \arctan\left(\frac{Z_T - 66 \cdot \sin(\Theta_{T-8} + \Theta_{T-9}) - 76.66 \cdot \sin(\Theta_{T-8})}{X_T - 66 \cdot \cos(\Theta_{T-8} + \Theta_{T-9}) - 76.66 \cdot \cos(\Theta_{T-8})}\right) - \Theta_{T-8} - \Theta_{T-9}$$

con

$$X_T = 156.68 \cdot \cos^3(\Theta_{T-8}) + 132 \cdot \cos^2(\Theta_{T-8}) - 40.85 \cdot \cos(\Theta_{T-8}) - 66$$

$$Y_T = 0$$

$$Z_T = \sqrt{D_{TC-TS}^2 - X_T^2}$$

$$a_1 = 2 \cdot 66 \cdot 76.66 \cdot \sin(\Theta_{T-8}) - 2 \cdot 66 \cdot Z_T$$

$$a_2 = 2 \cdot 66 \cdot 76.66 \cdot \cos(\Theta_{T-8}) - 2 \cdot 66 \cdot X_T$$

$$a = \sqrt{a_1^2 + a_2^2}$$

$$k = -Z_T^2 - X_T^2 + 2 \cdot 76.66 \cdot (X_T \cdot \cos(\Theta_{T-8}) + Z_T \cdot \sin(\Theta_{T-8})) - 8698.4667$$

Se debe calcular el ángulo  $\Theta_{T-8}$  para resolver la cadena cinemática del pulgar, dependiendo de la distancia  $D_{TC-TS}$ . En el siguiente apartado se calculará  $\Theta_{T-8}$ , considerando la orientación del pulgar en relación a la palma de la mano.

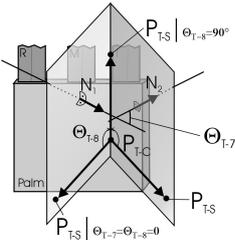
#### E. Orientación del pulgar

Se calcula la orientación del pulgar ( $\Theta_{T-7}$  y  $\Theta_{T-8}$ ) de la siguiente manera. Para el cálculo de  $\Theta_{T-7}$  se definen dos planos, con sus vectores normales correspondientes (Fig. 3a):

$$N_1 = (P_{T-S} \mid_{\Theta_{T-8}=90^\circ} - P_{T-C}) \times (P_{T-S} \mid_{\Theta_{T-7}=\Theta_{T-8}=0} - P_{T-C})$$

$$N_2 = (P_{T-S} - P_{T-C}) \times (P_{T-S} \mid_{\Theta_{T-8}=90^\circ} - P_{T-C})$$

a)



b)

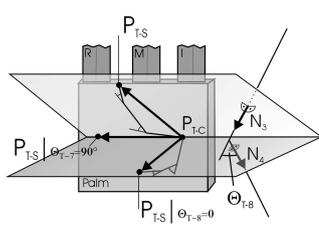


Figura 3. a) Planos, necesarios para la determinación de  $\Theta_{T-7}$ .  
b) Planos necesarios para la determinación de  $\Theta_{T-8}$ .

Entonces se calcula  $\Theta_{T-7}$  (teniendo en cuenta el signo correcto de  $\Theta_{T-7}$ ) como:

$$\Theta_{T-7} = \arccos\left(\frac{N_1 \cdot N_2}{|N_1| \cdot |N_2|}\right)$$

Para la determinación de  $\Theta_{T-8}$  (Fig. 3b) también se definen dos planos, con sus vectores normales correspondientes:

$$N_3 = (P_{T-S} - P_{T-C}) \times (P_{T-S} \mid_{\Theta_{T-7}=90^\circ} - P_{T-C})$$

$$N_4 = (P_{T-S} \mid_{\Theta_{T-8}=0} - P_{T-C}) \times (P_{T-S} \mid_{\Theta_{T-7}=90^\circ} - P_{T-C})$$

Entonces se calcula  $\Theta_{T-8}$  (teniendo en cuenta el signo correcto de  $\Theta_{T-8}$ ) como:

$$\Theta_{T-8} = \arccos\left(\frac{N_3 \cdot N_4}{|N_3| \cdot |N_4|}\right)$$

#### F. Ángulos en las puntas de los dedos corazón y pulgar

Con la determinación de la posición y la orientación de la palma de la mano, el dedo corazón y el dedo pulgar, se pueden calcular las dos articulaciones virtuales de las puntas de los dedos ( $\Theta_{F-11}$ ,  $\Theta_{F-12}$ ,  $\Theta_{M-11}$ ,  $\Theta_{M-12}$ ) que describen el punto de contacto sobre las esferas en las últimas falanges. Se definen los vectores normales  $N_5$ ,  $N_6$  y  $N_7$  (Fig. 4) como:

$$N_5 = (P_{F-S}^{10} - P_{F-S}^9) \times (P_{F-S}^9 - P_{F-S}^8)$$

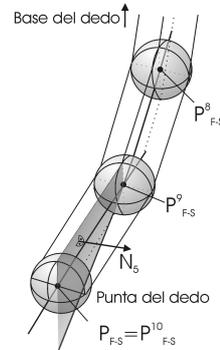
$$N_6 = (P_{F-S}^{10} - P_{F-S}^9) \times N_5$$

$$N_7 = N_5 \times N_6$$

$D_1$  es la distancia entre  $P_{F-O}$  y el plano por  $P_{F-S}^{10}$  ortogonal a  $N_5$ .  $D_2$  es la distancia entre  $P_{F-O}$  y el plano por  $P_{F-S}^{10}$  ortogonal a  $N_6$ .  $D_3$  es la distancia entre  $P_{F-O}$  y el plano por  $P_{F-S}^{10}$  ortogonal a  $N_7$ . Entonces se calculan los ángulos  $\Theta_{F-11}$  y  $\Theta_{F-12}$  (teniendo en cuenta los signos correctos de  $\Theta_{F-11}$  y  $\Theta_{F-12}$ ) como:

$$\Theta_{F-11} = \arctan\left(\frac{D_2}{\sqrt{D_1^2 + D_3^2}}\right) \quad \Theta_{F-12} = \arctan\left(\frac{D_1}{D_3}\right)$$

a)



b)

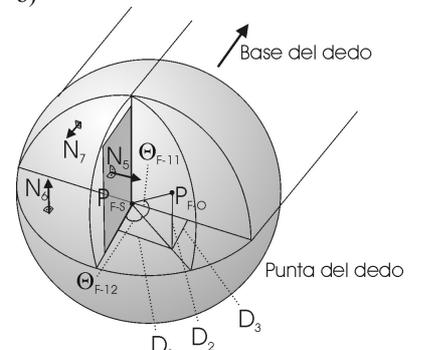


Figura 4. a) Plano formado por las dos últimas falanges del dedo F.  
b) Distancia  $D_1$ ,  $D_2$  y  $D_3$  necesarias para determinar  $\Theta_{F-11}$  y  $\Theta_{F-12}$ .

### G. Posición de la base de la mano

El conocimiento de la posición de la palma de la mano y del dedo corazón permite la determinación de la posición de la base de la mano  $P_{H-B}$ . La posición relativa del punto  $P_{T-C}$  en la mano es estática, y se conoce la posición global de  $P_{T-C}$ . Con los ángulos  $\Theta_{H-4}$  y  $\Theta_{H-5}$  se puede determinar la posición de la base de la mano, usando la representación de Denavit-Hartenberg:

$$P_{H-B} = P_{T-C} + ({}^5T \cdot {}^6T \cdot (-P_{T-C}))$$

Se rota el vector  $-P_{T-C}$  con la matriz de transformación de  $\Theta_{H-5}$  y de  $\Theta_{H-4}$ . La suma vectorial de  $P_{T-C}$  produce el desplazamiento lineal de la posición de la mano, el punto  $P_{H-B}$  resultante describe entonces la posición de la base de la mano.

### H. Los dedos índice y anular

Una vez se ha determinado la configuración del dedo corazón y del pulgar, los ángulos  $\Theta_{I-8}$  hasta  $\Theta_{I-12}$  y  $\Theta_{R-8}$  hasta  $\Theta_{R-12}$  de las articulaciones de los dedos índice y anular pueden ser determinados de una manera similar a la del dedo medio. La diferencia es que las distancias de interés  $D_{IB-IS}$  y  $D_{RB-RS}$  son las distancias entre los dos centros de las esferas  $P_{I-S}$  y  $P_{R-S}$  a la base del dedo  $P_{I-S}^8$  y  $P_{R-S}^8$ , respectivamente.

### I. Calidad de la configuración

Se calcula la función de calidad total de la configuración de la siguiente manera:

$$Calidad_{Configuración} = Calidad_{Mano} \cdot Calidad_{Punta-dedos} \cdot Calidad_{Altura-objeto}$$

El cálculo de la calidad total de la configuración ( $Calidad_{Configuración}$ ) se divide en tres factores. El primer factor ( $Calidad_{Mano}$ ) describe la calidad de la configuración de la mano, considerando solamente las articulaciones de los dedos sin las puntas de los dedos. El segundo factor ( $Calidad_{Punta-dedos}$ ) calcula la calidad de las articulaciones virtuales de las puntas de los dedos y el tercer factor ( $Calidad_{Altura-objeto}$ ) tiene en cuenta la altura del objeto que la configuración actual permite.

### J. Calidad de las articulaciones de la mano (sin las puntas de los dedos)

La calidad se calcula para cada articulación dependiendo de su rango. Dentro de su rango, la función de calidad decrece linealmente de 1 hasta 0.5 y fuera del rango converge exponencialmente hacia 0 (Fig. 5a). Utilizando esta función exponencialmente decreciente la búsqueda converge hacia una solución posible. La ecuación de la función de calidad aplicada para las articulaciones es:

$$Calidad_{Mano} = \begin{cases} 1 - \frac{|\Theta - \Theta_{Mid-Rango}|}{\Theta_{Sum-Rango}} & \text{si } \Theta \in \text{Rango} \\ 0.5 + \frac{|\Theta - \Theta_{Mid-Rango}|}{\Theta_{Sum-Rango}} & \text{si } \Theta \notin \text{Rango} \end{cases}$$

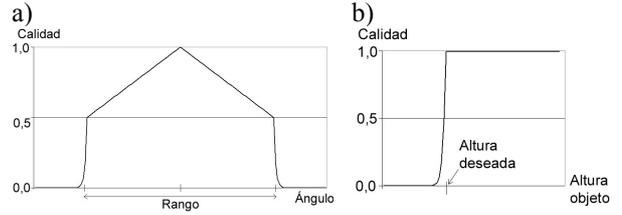


Figura 5. a) Función de calidad utilizada para los ángulos de la mano. b) Función de calidad utilizada para la altura del objeto permitida por la configuración de la mano.

donde  $\Theta$  es el ángulo de la articulación,  $\Theta_{Mid-Rango}$  es el valor medio del rango y  $\Theta_{Sum-Rango}$  es el valor máximo menos el valor mínimo del rango.

### K. Calidad de las articulaciones virtuales en las puntas de los dedos

Pequeños cambios en las articulaciones de los dedos pueden producir un cambio muy grande de las articulaciones de las puntas de los dedos. Por lo tanto se debe modificar la función de calidad presentada anteriormente. En vez de una función lineal para ángulos dentro de su rango, se utiliza su cuadrado. El resultado ( $Calidad_{Punta-dedos}$ ) es que los dedos tienden a tomar una configuración más ortogonal con respecto a la superficie del objeto.

### L. Calidad de la altura permitida del objeto

Si el proceso de búsqueda, que será aplicado después, sería suficiente utilizar una variable binaria indicando si la configuración de la mano permite la altura deseada del objeto o no. Para la búsqueda es necesario aplicar una función de calidad para la altura que tenga un valor de 1 si se alcanza la altura deseada y que decrezca exponencialmente hacia 0 en caso contrario. La Fig. 5b muestra la función de calidad para la altura del objeto permitida por la configuración de la mano. La función es la siguiente:

$$Calidad_{Altura-Objeto} = \begin{cases} 1 & \text{si } \Theta \in \text{Rango} \\ 0.5 + \frac{|\Theta - \Theta_{Mid-Rango}|}{\Theta_{Sum-Rango}} & \text{si } \Theta \notin \text{Rango} \end{cases}$$

La parte rápidamente decreciente de la función asegura que la búsqueda converja hacia una solución que permita por lo menos la altura deseada.

### M. Búsqueda la configuración óptima

El método heurístico utilizado para determinar el valor inicial de  $P_{T-C}$  (apartado III-A) no necesariamente da una configuración alcanzable, dentro de los rangos reales de los ángulos. Especialmente, por su rango pequeño, el ángulo  $\Theta_{F-7}$  suele estar fuera de su rango en la configuración inicial. Se aplica una búsqueda guiada para solucionar este problema. Esta búsqueda compara la solución encontrada con soluciones vecinas para mejorar

la posición del punto  $P_{T-C}$  y la configuración de la mano resultante. La búsqueda utiliza las funciones de calidad, explicadas en el apartado I hasta L, con el objetivo de encontrar la configuración óptima de la mano con los ángulos de las articulaciones cerca de la mitad de su rango.

En el proceso de búsqueda se compara la calidad de la configuración inicial de la mano ubicada en la posición inicial de  $P_{T-C}$  con soluciones encontradas por el desplazamiento del punto  $P_{T-C}$  alrededor de su posición inicial. La mejor solución sirve como nuevo punto de inicio del proceso de búsqueda. Esta búsqueda incremental termina cuando encuentra la solución óptima. Para reducir el tiempo de calculo, la búsqueda se realiza en dos fases. La primera fase utiliza un incremento grande para asegurar una rápida convergencia hacia la posición final de  $P_{T-C}$  y busca sólo en las coordenadas  $X$  y  $Z$ . Esta fase termina cuando no se realiza ninguna mejora. La segunda fase utiliza un incremento pequeño para obtener más precisión y la búsqueda se realiza en tres coordenadas  $X$ ,  $Y$  y  $Z$  hasta que encuentre la posición óptima de  $P_{T-C}$ .

#### IV. EJEMPLO NUMÉRICO

Se implementó el método propuesto para la mano MA-I en un simulador, escrito en  $C^{++}$ . Como ejemplo numérico se aplicó el procedimiento a un objeto con 80 mm de la anchura y 100 mm de altura. La Fig. 6 muestra el resultado de la configuración de la mano, permitiendo una altura interior de 102.64 mm.

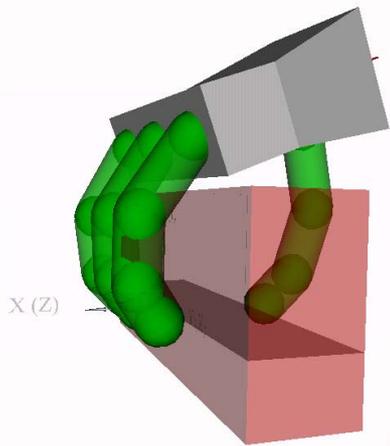


Figura 6. Visualización en VRML de los resultados de la simulación.

#### V. CALIDAD DE LA PRENSIÓN EN FUNCIÓN DEL TAMAÑO DEL OBJETO

Utilizando el simulador se calcularon las soluciones para los rangos frecuentes de anchura y altura de los objetos manipulados. Se consideró un rango de 0 mm hasta 200 mm para la anchura y la altura, con incrementos de

1 mm. La Fig. 7 muestra el resultado de la simulación. Se pueden distinguir tres partes.

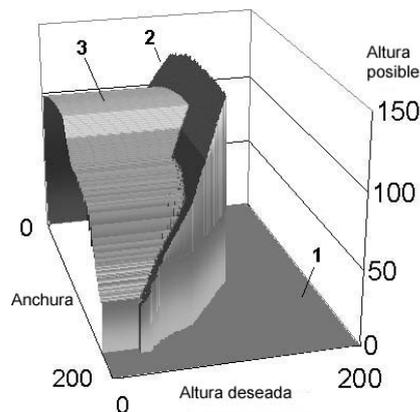


Figura 7. Altura posible del objeto según la configuración de la mano: (1) No encuentra ninguna solución posible; (2) La configuración cumple exactamente la altura deseada; (3) La configuración encontrada permite una altura superior que la requerida por el objeto.

En la primera parte (1) no se encontró ninguna configuración posible para los valores deseados. Es decir, el objeto es demasiado grande para la mano. La segunda parte (2) indica las soluciones que exactamente cumplen con la altura deseada del objeto. Es un plano que tiene un ángulo de  $45^\circ$  porque la altura deseada y la altura obtenida son iguales. En esta parte la búsqueda aplicada está dominada por la exigencia de cumplir con la altura deseada del objeto.

Finalmente, la tercera parte (3) muestra las soluciones resultantes de configuraciones de la mano que permiten una altura superior a la que es requerida por el objeto. En esta parte la altura permitida es constante para objetos con la misma anchura, sin reparar en sus alturas reales.

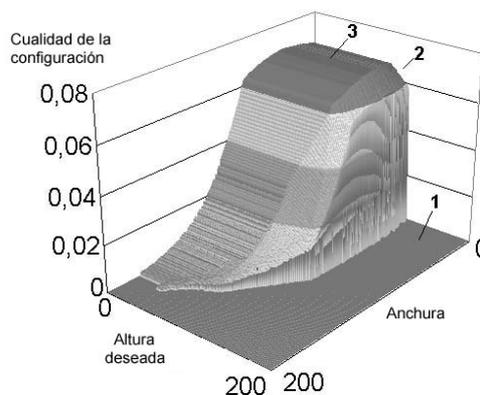


Figura 8. Calidad de la configuración de la mano. (1) No encuentra ninguna solución posible. (2) La búsqueda está dominada por cumplir con la altura deseada del objeto. (3) La búsqueda de una configuración óptima de la mano está dominada por la anchura del objeto.

Se pueden observar las mismas tres partes en el gráfico que muestra la calidad de la configuración obtenida (Fig. 8). La primera parte (1) con la calidad cero muestra que no se encontró ninguna configuración posible. La segunda parte (2) esta dominada por la exigencia de cumplir con la altura deseada del objeto y la calidad de la configuración decrece rápidamente mientras la mano se enfrenta con configuraciones más extremas (se requieren largas anchuras o alturas). La tercera parte (3) muestra que la calidad de la configuración de la mano es constante para objetos de la misma anchura y con alturas más pequeñas de las realmente permitidas en la configuración óptima.

## VI. CONCLUSIÓN

El objetivo del método propuesto es encontrar una configuración adecuada de la mano con respecto al tamaño del objeto a manipular, intentando a mantener los ángulos de las articulaciones cerca de la mitad de su rango. Se aplicó el método a una mano particular y objetos de alturas y anchuras entre 0 y 200 mm. Los resultados muestran que la solución depende de la altura requerida por el objeto. Para alturas pequeñas del objeto el algoritmo encuentra una configuración óptima que permitiría al objeto entrar más en la mano. En casos en que la altura es relativamente larga, se enfrenta con configuraciones más extremas y la calidad de la configuración decrece.

## VII. REFERENCIAS

- [1] K.B.Shimoga, 1996, "Robot Grasp Synthesis Algorithms: A Survey", International Journal of Robotics Research, Vol.15, No.3, p.230-266.
- [2] John J. Craig, 1986, "Introduction to Robotics Mechanics and Control", Addison-Wesley Publishing Company Inc., p. 60ff.

- [3] R. Suárez y P. Grosch, 2003, "Mano mecánica MA-I" XXIV Jornadas de Automática, CEA-IFAC, León, España, (ISBN 84-931846-7-5).
- [4] G. Färber and R. Suárez, 2003, "Determination of the inverse kinematics of a mechanic hand in order to grasp a predetermined object with two or more fingers", Documento Técnico IOC-DT-P-2003-11.

## VIII. APÉNDICE

Table I. Parámetros de la representación de Denavit-Hartenberg para el pulgar.

$i$	$\alpha_{i-1}$	$a_{i-1}$ /mm	$d_i$ /mm	Rango	$\Theta_{\text{Offset}}$
4	90°	0	0	0°...360°	
5	-90°	0	0	0°...360°	
6	90°	0	343	-180°...360°	-44.56°
7	14.11°	7.56	-203.32	33.44°...57.44°	
8	90°	0	0	0°...90°	
9	0°	76.66	0	0°...90°	
10	0°	66	0	0°...90°	
11	0°	39.17	0	20°...135°	
12	-90°	0	0	-90°...90°	
13	0°	20	0		

Table II. Parámetros de la Representación de Denavit-Hartenberg para los dedos índice / corazón / anular (diferencias destacadas en negrita).

$i$	$\alpha_{i-1}$	$a_{i-1}$ /mm	$d_i$ /mm	Rango	$\Theta_{\text{Offset}}$
4	90°	0	0	0°...360°	
5	-90°	0	0	0°...360°	
6	90°	0	276.55	-180°...360°	
7	90°	<b>67/0/-67</b>	9.5	78°...102°	
8	90°	0	0	0°...90°	
9	0°	76.66	0	0°...90°	
10	0°	66	0	0°...90°	
11	0°	33.62	0	20°...135°	
12	-90°	0	0	-90°...90°	
13	0°	20	0		