XLIV Jornadas de Automática 2023

https://jautomatica.es

Resolución geométrica de la cinemática inversa de un robot sin muñeca esférica

Palomo-Avellaneda, L., Rosell, J., Suárez, R., Zaplana, I.*

Institute of Industrial and Control Engineering, Universitat Politècnica de Catalunya - BarcelonaTech, 08028 Barcelona, España.

To cite this article: Palomo-Avellaneda, L., Rosell, J., Suárez, R., Zaplana, I. 2023. AGeometric solution for the inverse kinematics of robots without spherical wrist. *XLIV Jornadas de Automática*, 708-713
https://doi.org/10.17979/spudc.9788497498609.708

Resumen

Una de las aplicaciones más conocidas del álgebra geométrica en la ingeniería consiste en proporcionar una formulación compacta de la cinemática de los robots manipuladores serie. Sin embargo, el uso de álgebra geométrica en el campo de la robótica está aún en sus inicios, y todavía hay varios problemas abiertos que pueden ser tratados con esta elegante y compacta formulación. En esta línea, el presente artículo introduce una estrategia basada en el álgebra geométrica conforme para resolver el problema de la cinemática inversa para un robot manipulador de 6 grados de libertad (GdL) sin muñeca esférica, para el cual es conocido que el problema de la cinemática inversa no tiene, en general, solución analítica. Para ello, la estrategia propuesta en este artículo se basará en la explotación de las propiedades algebraicas y geométricas del álgebra geométrica conforme como, por ejemplo, que toda isometría se puede representar de manera compacta como un rotor, y que los objetos geométricos no son más que multivectores.

Palabras clave: Manipuladores robóticos, cinemática inversa, álgebra geométrica, muñeca no esférica, modelado de sistemas robóticos.

Geometric solution for the inverse kinematics of robots without spherical wrist

Abstract

One of the most known applications of geometric algebra in engineering consists of providing a compact formulation of the kinematics of serial robotic manipulators. However, the use of geometric algebra in the field of robotics is still in its early stages, and there are still several open problems that can be addressed with this elegant and compact formulation. In this context, this work introduces a strategy based on conformal geometric algebra to solve the inverse kinematics problem for a 6 degree-of-freedom (DOF) robotic manipulator without a spherical wrist, for which it is known that the inverse kinematics problem generally does not have an analytical solution. To achieve this, the strategy proposed in this work will rely on exploiting the algebraic and geometric properties of conformal geometric algebra such as, for instance, the fact that every isometry can be represented compactly as a rotor, and that geometric objects are nothing more than multivectors.

Keywords: Robotic manipulators, inverse kinematics, geometric algebra, non-spherical wrist, modeling of robotic systems.

1. Introducción

Un robot manipulador serie es, geométricamente hablando, una secuencia de elementos estructurales rígidos, denominados *eslabones*, conectados entre sí mediante pares cinemáticos accionados por motor, denominados *articulaciones*. Cada articulación proporciona movimiento relativo entre los dos eslabones consecutivos que conecta (Figura 1). Un componente importante es el extremo libre del último eslabón, llamado *elemento terminal* del robot. Su importancia radica en el hecho de que todas las herramientas que el robot necesita para llevar a cabo las tareas que tiene programadas, como herramientas de pintura, destornilladores, manos robóticas, o pinzas, entre otros, se colocan en el elemento terminal. Por lo tanto, es fundamental conocer: (1) dónde se encuentra (es decir, cuál es su posición y

*Autor para correspondencia: isiah.zaplana@upc.edu
Attribution-NonCommercial-ShareAlike 4.0 International (CC BY-NC-SA 4.0)

orientación en $\mathbb{R}^3$) el elemento terminal en cada *configuración* del robot y, (2) cuál o cuáles son las configuraciones del robot que hacen que su elemento terminal tenga una cierta posición y orientación predefinidas. El primer problema se conoce como el problema de la *cinemática directa*, y segundo como el problema de la *cinemática inversa*.

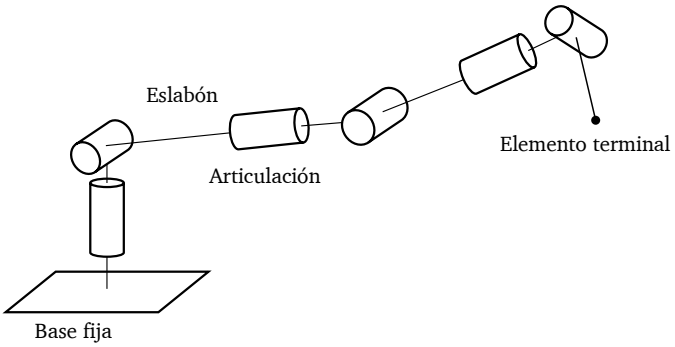

Figura 1: Esquema general de un robot manipulador serie

Las articulaciones de los robots manipuladores serie pueden ser de dos tipos: *articulaciones de revolución*, o *prismáticas*. La magnitud del movimiento de cada articulación se conoce como la *variable de articulación* y se denota por q. En consecuencia, para cada articulación i del robot $1 \leq i \leq n$, q_i un ángulo θ_i, si la articulación i es de revolución, o un desplazamiento d_i, si la articulación i es prismática. El vector de todas las variables de articulación $\boldsymbol{q} = (q_1, \ldots, q_n)$ se dice que es la *configuración* del robot. Además, un robot manipulador serie se dice que tiene *n grados de libertad* (GdL) si su configuración se especifica mediante n variables de articulación. Finalmente, se denomina *espacio de configuraciones* o *espacio de articular* del robot, denotado por C, al espacio definido por todas las configuraciones de un robot.

Asimismo, se asocia un sistema de coordenadas $\{TCP\} = \{\boldsymbol{o}, \boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}, \boldsymbol{z}\}$ al elemento terminal del robot. Dicho sistema de coordenadas está definido en función de un sistema de referencia $\{U\}$, que normalmente se asocia a la base fija del robot y que, como no depende de la configuración de éste, recibe el nombre de *sistema de referencia global*. El punto $\boldsymbol{o} \in \mathbb{R}^3$ describe la posición del elemento terminal con respecto a $\{U\}$, y la base $\{\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}, \boldsymbol{z}\}$ describe su orientación con respecto a $\{U\}$. Para representar de forma compacta la posición y orientación de un sistema de coordenadas con respecto a un sistema de referencia, se utilizan matrices de transformación homogénea. En particular, T_U^A denota la matriz de transformación homogénea que expresa el sistema de coordenadas $\{A\}$ con respecto al sistema de referencia $\{U\}$. Finalmente, el espacio de todas las posiciones y orientaciones del elemento terminal con respecto al sistema de referencia $\{U\}$ se conoce como el *espacio operacional* del robot y se denota por $\mathcal{X}$.

En la práctica, se puede asociar un sistema de coordenadas, llamado *sistemas de coordenadas articular*, a cada articulación del robot, es decir, para cada $1 \leq i \leq n$, se tiene el sistema de coordenadas $\{i\} = \{\boldsymbol{o}_i, \boldsymbol{x}_i, \boldsymbol{y}_i, \boldsymbol{z}_i\}$. Cada uno de estos sistemas de coordenadas articular depende de la posición y orientación de las articulaciones anteriores, es decir, depende de los sistemas de coordenadas articulares anteriores. En particular, para $2 \leq i \leq n$, el sistema de coordenadas articular $\{i\}$ está relacionado con el sistema de coordenadas articular $\{i-1\}$, que actúa como sistema de referencia para el primero. Para $i = 1$, puesto que no hay ninguna articulación anterior, se considera que su sistema de referencia es $\{U\}$.

Cada sistema de coordenadas articular está determinado por la variable de articulación q_i y se define a través del siguiente conjunto de reglas (Siciliano et al., 2008):

- El eje $\boldsymbol{z}_i$ está alineado con el eje de rotación/traslación de la articulación.
- El eje $\boldsymbol{x}_i$ está alineado con la perpendicular común a $\boldsymbol{z}_i$ y $\boldsymbol{z}_{i-1}$.
- El origen $\boldsymbol{o}_i$ se encuentra en la intersección de $\boldsymbol{z}_i$ con la perpendicular común a $\boldsymbol{z}_i$ y $\boldsymbol{z}_{i-1}$.

Dada una configuración $\boldsymbol{q} \in C$, el objetivo es encontrar la posición y orientación del elemento terminal asociadas a $\boldsymbol{q}$. En otras palabras, el problema de la cinemática directa consiste en encontrar la función continua f que asigna la posición y orientación $\boldsymbol{x}$ del elemento terminal a cada configuración $\boldsymbol{q}$:

$$\begin{aligned} f : C &\to \mathcal{X} \\ \boldsymbol{q} &\mapsto \boldsymbol{x} \end{aligned} \tag{1}$$

Dado que f está bien definida, se dice que la cinemática directa siempre tiene *solución analítica*. Sin embargo, f no tiene, en general, una inversa global (Baker and Wampler, 1987, 1988) y, en consecuencia, el problema de la cinemática inversa de un robot manipulador serie arbitrario no tiene solución analítica. Esto implica que se necesita recurrir a métodos geométricos y/o numéricos para resolverlo.

Un robot manipulador serie se dice que tiene *muñeca esférica* si los ejes de rotación o traslación de sus tres últimas articulaciones se intersectan en un punto o son paralelos. El teorema de Pieper (Pieper, 1968) establece que la cinemática inversa de los robots manipuladores serie con muñeca esférica siempre tiene solución analítica. Además, la demostración del teorema de Pieper es constructiva en el sentido de que las soluciones en forma cerrada se derivan explícitamente para cualquier tipo de robot con una muñeca esférica. Sin embargo, si hay un desalineamiento entre alguno de los ejes de las tres últimas articulaciones (como el que se muestra en la Figura 2), entonces el robot ya no tiene muñeca esférica y, por lo tanto, el teorema de Pieper no se puede aplicar.

Para resolver el problema de la cinemática inversa en estos casos, Paul (1981) desarrolló un método basado en las matrices homogéneas $\boldsymbol{T}_{i-1}^{i}$. De hecho, dada la identidad cinemática:

$$\boldsymbol{T}_U^1 \cdot \boldsymbol{T}_1^2 \cdots \boldsymbol{T}_{n-1}^n = \boldsymbol{T}_U^n, \tag{2}$$

donde $\boldsymbol{T}_U^n$ es la matriz de transformación homogénea que describe la posición y orientación del elemento terminal con respecto a su base, y donde $\boldsymbol{T}_{i-1}^{i}$ solo depende de la variable articular q_i, el método de Paul consiste en analizar cada una de las siguientes ecuaciones matriciales:

$$\boldsymbol{T}_{i-1}^{i} \cdots \boldsymbol{T}_{n-1}^{n} = \left(\boldsymbol{T}_{i-2}^{i-1}\right)^{-1} \cdots \left(\boldsymbol{T}_{0}^{1}\right)^{-1} \cdot \boldsymbol{T}_{0}^{n} \quad \text{para } i = 2, \ldots, n \tag{3}$$

con el objetivo de aislar ecuaciones trigonométricas conocidas que se pueden resolver analíticamente para una o más variables articulares. Sin embargo, el gran número de combinaciones diferentes junto con las complicaciones para resolver analíticamente ecuaciones trigonométricas arbitrarias hace que este

método no sea adecuado para cadenas cinemáticas de geometría no trivial.

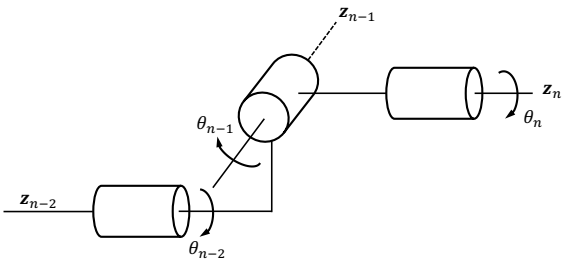

Figura 2: Muñeca no esférica. Nótese el desalineamiento entre los ejes de las articulaciones $n-2$ y $n-1$.

La mayoría de los trabajos sobre cinemática inversa para robots sin muñeca esférica encontradas en la literatura se centran en métodos numéricos o en métodos geométricos particulares (Pan et al., 2012; Kucuk and Bingul, 2014; Zaplana et al., 2018; Zhou et al., 2022). Aunque estos últimos sólo se pueden aplicar a los robots específicos para los que han sido diseñados, proporcionan el conjunto completo de soluciones, a diferencia de lo que ocurre con los primeros que sólo obtienen la aproximación de una de las soluciones. Sin embargo, los métodos geométricos son difíciles de diseñar, especialmente para robots sin muñeca esférica. Esta es una de las razones por las que el álgebra geométrica conforme puede resultar útil para abordar este problema. Por ejemplo, los trabajos de Bayro-Corrochano and Zamora-Esquivel (2007); Campos-Macías et al. (2017); Hildenbrand et al. (2008); Tørdal et al. (2017); Zamora and Bayro-Corrochano (2004) resuelven la cinemática inversa de diferentes tipos de robots mediante el uso del álgebra geométrica conforme. La idea utilizada en todos ellos es definir diferentes objetos geométricos cuyas intersecciones coincidan con los orígenes de los sistemas de coordenadas articulares. Estos, a su vez, permiten calcular las variables articulares y, por lo tanto, la configuración o configuraciones asociadas a una posición y orientación predefinidas del elemento terminal. Además, los autores del presente trabajo derivaron recientemente una estrategia geométrica basada en el álgebra geométrica conforme que resuelve la cinemática inversa de robots manipuladores serie arbitrarios con muñeca esférica y hasta 7 GdL (Zaplana et al., 2022). Sin embargo, ninguna de las mencionadas contribuciones trata el problema de la cinemática inversa para robots sin muñeca esférica usando álgebra geométrica conforme. Por ello, en este trabajo se desarrolla un método geométrico basado en el álgebra geométrica conforme para resolver la cinemática inversa de robots manipuladores serie sin muñeca esférica.

El resto del presente trabajo se organiza de la siguiente manera: en la Sección 2, se proporciona una breve introducción al álgebra geométrica conforme que permite familiarizarse con las herramientas utilizadas en el resto de secciones. La Sección 3 introduce una nueva formulación de la cinemática directa para robots manipuladores serie basada en el álgebra geométrica conforme que es equivalente a la desarrollada por otros autores. En la Sección 4, se presenta el desarrollo de la nueva estrategia geométrica para resolver el problema de la cinemática inversa para robots manipuladores serie sin muñeca esférica. Finalmente, se presentan las conclusiones en la Sección 5.

2. Álgebra geométrica conforme

El álgebra geométrica es una estructura matemática que extiende los conceptos de vector y álgebra lineal para describir relaciones y operaciones geométricas de una manera más intuitiva y compacta. Su elemento definitorio es el *producto geométrico*, que sobre dos vectores no-nulos $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b} \in \mathbb{R}^n$, está definido como:

$$\boldsymbol{ab} = \boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{b} + \boldsymbol{a} \wedge \boldsymbol{b}, \tag{4}$$

donde $\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{b}$ es el producto escalar entre vectores, y $\boldsymbol{a} \wedge \boldsymbol{b}$ es el *producto exterior* de $\boldsymbol{a}$ y $\boldsymbol{b}$ y define un nuevo elemento, denominado bivector, y que se dice tiene grado 2. Se cumple además que $\boldsymbol{a} \wedge \boldsymbol{b} = -\boldsymbol{b} \wedge \boldsymbol{a}$ y, por tanto $\boldsymbol{a} \wedge \boldsymbol{a} = 0$ para todos $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b} \in \mathbb{R}^n$. Por la asociatividad del producto geométrico, y en particular del producto exterior, se pueden construir elementos de grado tres, llamados trivectores y que son de la forma $\boldsymbol{a} \wedge \boldsymbol{b} \wedge \boldsymbol{c}$ para algunos $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c} \in \mathbb{R}^n$. De igual modo, se pueden construir elementos de cualquier grado hasta llegar a n. En general, un elemento de la forma $\boldsymbol{a}_1 \wedge \cdots \wedge \boldsymbol{a}_m$ con $1 \leq m \leq n$ se dice que es un m-vector, mientras que las combinaciones de m-vectores (con distinto m) se dice que son multivectores.

Por tanto, el álgebra geométrica de un espacio vectorial $\mathbb{R}^n$, que se denota $\mathcal{G}_n(\mathbb{R}^n)$ o simplemente $\mathcal{G}_n$, es también un espacio vectorial cuya base se construye a partir de la base ortonormal de $\mathbb{R}^n$ usando el producto geométrico. En particular, dada una base ortonormal $\{e_1, e_2, e_3\}$ de $\mathbb{R}^3$, se tiene que $e_i e_j = 1$ si $i = j$, y que $e_i e_j = e_i \wedge e_j$ si $i \neq j$. En consecuencia, la base de $\mathcal{G}_3$ es el conjunto generador $\{1, e_1, e_2, e_3, e_{12}, e_{13}, e_{23}, e_{123}\}$, donde $e_{ij} = e_i \wedge e_j$ y $e_{123} = e_1 \wedge e_2 \wedge e_3$.

En álgebra geométrica, los bivectores juegan un papel fundamental puesto que codifican rotaciones en el espacio. De hecho, toda rotación se define como la exponencial de un cierto bivector $B = \boldsymbol{a} \wedge \boldsymbol{b}$, es decir, $R = e^B$, donde el elemento $R \in \mathcal{G}_3$ recibe el nombre de *rotor*. La expresión trigonométrica de un rotor aporta información más útil sobre los componentes fundamentales de la rotación que codifica:

$$R = \cos(\theta/2) + B \sin(\theta/2), \tag{5}$$

donde θ es el ángulo de rotación y B es el bivector que representa el eje de rotación (que es el vector normal al plano generado por $\boldsymbol{a}$ y $\boldsymbol{b}$). La rotación de un vector $\boldsymbol{x}$ se realiza mediante el producto sándwich $\boldsymbol{x}' = R\boldsymbol{x}\widetilde{R}$, donde $\widetilde{R} = \cos(\theta/2) - B \sin(\theta/2)$.

El siguiente paso natural sería encontrar los elementos de $\mathcal{G}_3$ que codifican traslaciones en el espacio. Por desgracia, $\mathcal{G}_3$ no tiene estructura suficiente para ello y es entonces cuando surge la necesidad de recurrir al álgebra geométrica conforme. El álgebra geométrica conforme es una extensión del álgebra geométrica que permite representar y manipular objetos geométricos en un espacio de mayor dimensión. Esta herramienta matemática es ampliamente utilizada en geometría computacional debido a su capacidad para describir y operar con transformaciones geométricas.

El álgebra geométrica conforme de $\mathbb{R}^3$ es el álgebra geométrica del espacio pseudo-Euclídeo $\mathbb{R}^{4,1}$, es decir, $\mathcal{G}_{4,1}$. Un espacio pseudo-Euclídeo es un espacio vectorial en el que algunos de los vectores de su base ortonormal tienen modulo -1. En el lenguaje del álgebra geométrica, esto es equivalente a decir que el cuadrado de dichos vectores vale -1 ($\boldsymbol{e} \cdot \boldsymbol{e} = \boldsymbol{e}^2 = -1$). Para el caso particular de $\mathbb{R}^3$, la base de $\mathbb{R}^{4,1}$ sería $\{e_1, e_2, e_3, e_4\}$, donde $e_1^2 = e_2^2 = e_3^2 = 1$, mientras que $e_4^2 = -1$. Esto permite,

a su vez, definir dos *vectores nulos* e_0 y e_∞ que verifican que $e_0^2 = e_\infty^2 = 0$. En sentido geométrico, es claro que e_0 es el punto asociado con el origen, mientras que e_∞ es el punto asociado con el punto del infinito. Además, la función $H : \mathbb{R}^3 \to \mathcal{G}_{4,1}$, definida como

$$v = H(\boldsymbol{v}) = \boldsymbol{v} + e_0 + \frac{1}{2}\boldsymbol{v}^2 e_\infty \tag{6}$$

transforma vectores de $\mathbb{R}^3$ en vectores nulos (es decir, $v^2 = 0$).

Con estas herramientas, las traslaciones se pueden codificar también como rotores T de la forma:

$$T = 1 + a\frac{e_\infty \boldsymbol{a}}{2}, \tag{7}$$

donde $\boldsymbol{a}$ es el eje de traslación y a la cantidad de desplazamiento. Se tiene además que $\widetilde{T} = 1 - a(e_\infty \boldsymbol{a})/2$.

Finalmente, el producto exterior de vectores nulos permite representar objetos geométricos de forma más compacta. En particular:

- $pp^* = a \wedge b$ para dos vectores nulos a y b es un bivector representando al par de puntos $\boldsymbol{a}$ y $\boldsymbol{b}$.
- $\ell^* = a \wedge b \wedge e_\infty$ para dos vectores nulos a y b es un trivector representando a la recta que pasa por los puntos $\boldsymbol{a}$ y $\boldsymbol{b}$.
- $\pi^* = a \wedge b \wedge c \wedge e_\infty$ para tres vectores nulos a, b y c es un 4-vector representando al plano que pasa por los puntos $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}$ y $\boldsymbol{c}$.
- $s^* = a \wedge b \wedge c \wedge d$ para cuatro vectores nulos a, b, c y d es un 4-vector representando a la esfera que pasa por los puntos $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}$ y $\boldsymbol{d}$.

Para cada tipo de objeto geométrico O (recta, plano o esfera), esta representación se conoce como la representación externa de O y se denota con un asterisco. Por dualidad, existe también la representación interna (basada, en vez de en el producto exterior, en el producto interior) de O, que queda:

- $\ell = \boldsymbol{v} e_{123} - (\boldsymbol{p} \wedge \boldsymbol{v}) e_{123} e_\infty$ representa a la recta de vector director $\boldsymbol{v}$ y que pasa por el punto $\boldsymbol{p}$.
- $\pi = \boldsymbol{n} + \delta e_\infty$ representa al plano de vector normal $\boldsymbol{n}$ y distancia al origen δ.
- $s = c - 1/2\rho^2 e_\infty$ para un vector nulo c representa a la esfera de centro $\boldsymbol{c}$ y radio ρ.

Como ya se ha dicho, ambas representaciones son duales, y en consecuencia, para un objeto geométrico O, K^* denotará su representación externa y K su representación interna.

3. Cinemática directa

Dadas dos bases de $\mathbb{R}^3$, $\{\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}, \boldsymbol{z}\}$ y $\{\boldsymbol{x}', \boldsymbol{y}', \boldsymbol{z}'\}$, existe un rotor $R \in \mathcal{G}_3$, determinado de manera única salvo el signo, tal que $\boldsymbol{x}' = R\boldsymbol{x}\widetilde{R}$, $\boldsymbol{y}' = R\boldsymbol{y}\widetilde{R}$, y $\boldsymbol{z}' = R\boldsymbol{z}\widetilde{R}$ (Doran and Lasenby, 2003).

En el álgebra geométrica conforme, dado que las traslaciones también se codifican mediante rotores, se puede extender de forma trivial el resultado anterior para incluir también los orígenes de sus respectivos sistemas de coordenadas $\{\boldsymbol{o}, \boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}, \boldsymbol{z}\}$ y $\{\boldsymbol{o}', \boldsymbol{x}', \boldsymbol{y}', \boldsymbol{z}'\}$.

Teorema 1. *Dados dos sistemas de coordenadas arbitrarios* $\{\boldsymbol{o}, \boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}, \boldsymbol{z}\}$ *y* $\{\boldsymbol{o}', \boldsymbol{x}', \boldsymbol{y}', \boldsymbol{z}'\}$*, existe un rotor* $R \in \mathcal{G}_{4,1}$*, determinado de manera única salvo el signo, que satisface:*

$$\boldsymbol{o}' = R\boldsymbol{o}\widetilde{R}, \quad \boldsymbol{x}' = R\boldsymbol{x}\widetilde{R}, \quad \boldsymbol{y}' = R\boldsymbol{y}\widetilde{R}, \quad \boldsymbol{z}' = R\boldsymbol{z}\widetilde{R} \tag{8}$$

Además, $R = R_1 R_2$*, donde:*

$$R_1 = 1 + v\frac{\boldsymbol{v} e_\infty}{2}, \tag{9}$$

con $\boldsymbol{v} = \boldsymbol{o}' - \boldsymbol{o}$*,* $v = |\boldsymbol{v}|$ *y* $R_2 \in \mathcal{G}_3$*, es decir,* R_1 *es el rotor que codifica la traslación que lleva* $\boldsymbol{o}$ *a* $\boldsymbol{o}'$*, mientras que* R_2 *es el rotor que codifica la rotación que transforma* $\{\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}, \boldsymbol{z}\}$ *en* $\{\boldsymbol{x}', \boldsymbol{y}', \boldsymbol{z}'\}$*.*

Como corolario del Teorema 1, se puede recuperar el rotor que transforma el $(i-1)$-ésimo sistema de coordenadas articular en el i-ésimo sistema de coordenadas articular para cada $2 \leq i \leq n$. Estos rotores permiten relacionar el sistema de referencia asociado a la base del robot con el asociado al elemento terminal, lo que permite calcular su posición y orientación con respecto al sistema de referencia global. Cabe destacar que, dado que los sistemas de coordenadas articulares están determinados por las variables articulares, los rotores recuperados a partir de ellos también lo estarán.

Hay diferentes formas de calcular los mencionados rotores. Por ejemplo, Lavor et al. (2018) adaptan la convención Denavit-Hartenberg para robots manipuladores serie. En particular, para cada articulación, se definen cuatro rotores a partir de los cuatro parámetros Denavit-Hartenberg, y se calcula su producto. Finalmente, y análogamente a como se hace con matrices de transformación homogéneas, se realiza el producto de los rotores resultantes para obtener el rotor que relaciona el sistema de referencia global con el sistema de coordenadas asociado al elemento terminal. No obstante, en el presente trabajo se va a seguir un enfoque diferente basado en el uso de bases recíprocas.

Dado una base $\{e_1, e_2, e_3\}$, su *base recíproca* $\{e^1, e^2, e^3\}$ es aquella base que satisface $e_i \cdot e^j = \delta_{ij}$, donde $\delta_{(\cdot)}$ denota la delta de Kronecker. En el trabajo de Doran and Lasenby (2003), el lector puede encontrar algunas propiedades útiles de las bases recíprocas, así como una expresión explícita para calcularlas. Además, existe una expresión para el rotor que relaciona dos bases diferentes $\{e_1, e_2, e_3\}$ y $\{f_1, f_2, f_3\}$:

$$R = \frac{1 + f_1 e^1 + f_2 e^2 + f_3 e^3}{|1 + f_1 e^1 + f_2 e^2 + f_3 e^3|}. \tag{10}$$

Si se aplica la ecuación (10) a las bases de los sistemas de coordenadas articulares, tenemos que:

$$R_{i-1}^i = \frac{1 + \boldsymbol{x}_i \boldsymbol{x}^{i-1} + \boldsymbol{y}_i \boldsymbol{y}^{i-1} + \boldsymbol{z}_i \boldsymbol{z}^{i-1}}{|1 + \boldsymbol{x}_i \boldsymbol{x}^{i-1} + \boldsymbol{y}_i \boldsymbol{y}^{i-1} + \boldsymbol{z}_i \boldsymbol{z}^{i-1}|} \tag{11}$$

es el rotor que transforma la base del $(i-1)$-ésimo sistema de coordenadas articular en la base del i-ésimo sistema de coordenadas articular. Ahora, si se considera el rotor de la ecuación (9) y se aplica a los orígenes de los sistemas de coordenadas articulares, se tiene que:

$$T_{i-1}^i = 1 + v\frac{e_\infty \boldsymbol{v}}{2}, \tag{12}$$

donde $\boldsymbol{v} = \boldsymbol{o}_i - \boldsymbol{o}_{i-1}$.

En resumen, el rotor que transforma el $(i-1)$-ésimo sistema de coordenadas articular en el i-ésimo sistema de coordenadas articular es $M_{i-1}^i = T_{i-1}^i R_{i-1}^i$. Por lo tanto, el rotor que relaciona el sistema de referencia global con el sistema de coordenadas,

y por tanto con la posición y orientación, del elemento terminal para una configuración específica $\boldsymbol{q} \in C$ es:

$$M = M_0^1 M_1^2 \cdots M_{n-1}^n. \tag{13}$$

En resumen, se tiene que para cada configuración $\boldsymbol{q} = (q_1, \ldots, q_n) \in C$, la posición y orientación del elemento terminal asociado a $\boldsymbol{q}$ es:

$$\begin{aligned} P' &= M(\boldsymbol{q}) P \widetilde{M}(\boldsymbol{q}) \\ &= M_0^1(q_1) \cdots M_{n-1}^n(q_n) P \widetilde{M}_{n-1}^n(q_n) \cdots \widetilde{M}_0^1(q_1), \end{aligned} \tag{14}$$

donde P es la posición u orientación del sistema de referencia asociado a la base del robot y P' denota la posición u orientación del elemento terminal.

4. Cinemática Inversa

Si la posición predefinida del elemento terminal del robot se denota como $\boldsymbol{p} \in \mathbb{R}^3$, y la orientación predefinida como $\{\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}, \boldsymbol{z}\}$, entonces el primer paso consistirá en calcular el vector nulo $p \in \mathcal{G}_{4,1}$ asociado a $\boldsymbol{p}$ usando (6), i.e., $p = H(\boldsymbol{p})$. Además, con los tres vectores $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}, \boldsymbol{z}$ se definen tres rectas, cuya representación interna es:

$$\begin{aligned} \ell_{\boldsymbol{x}} &= \boldsymbol{x} e_{123} - (\boldsymbol{x} \wedge \boldsymbol{p}) e_{123} e_\infty, \\ \ell_{\boldsymbol{y}} &= \boldsymbol{y} e_{123} - (\boldsymbol{y} \wedge \boldsymbol{p}) e_{123} e_\infty, \\ \ell_{\boldsymbol{z}} &= \boldsymbol{z} e_{123} - (\boldsymbol{z} \wedge \boldsymbol{p}) e_{123} e_\infty, \end{aligned} \tag{15}$$

Nótese que la orientación del elemento terminal está determinada de manera única por dos rectas cualesquiera de las tres rectas definidas.

En este trabajo, se considera el típico robot manipulador serie, representado en la Figura 3, pero en lugar de tener muñeca esférica, tiene un desalineamiento entre el cuarto y quinto eje de articulación. En este caso, se conocen los puntos p_0 (el vector nulo representando al origen del sistema de referencia asociado a la base fija del robot) y p (el vector nulo de $\boldsymbol{p}$, que representa la posición predefinida del elemento terminal). Por lo tanto, se necesita calcular los vectores nulos p_1, p_2 y p_3, que representan puntos en el espacio asociados con la posición de las articulaciones.

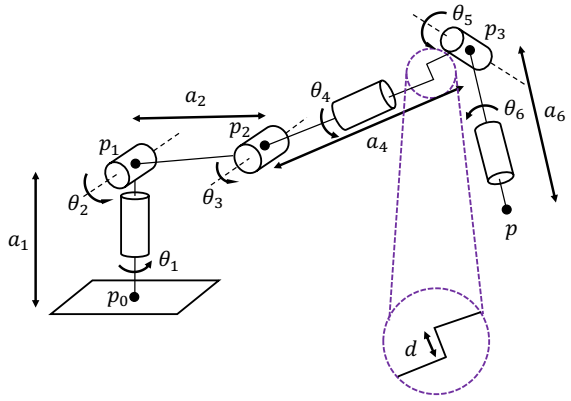

Figura 3: Representación esquemática de un robot manipulador serie: la longitud del eslabón i se denota por a_i, mientras que la variable de articulación de la i-ésima articulación se denota por el ángulo θ_i. El valor d es la longitud del desalineamiento localizado entre el cuarto y quinto eje de articulación. Para determinar el valor de las variables de articulación desconocidas, es necesario calcular los vectores nulos p_i puesto que estos representan puntos en el espacio Cartesiano definidos por la posición de las articulaciones.

El punto p_1 es el resultado de trasladar el punto p_0 a lo largo del eje z del sistema de coordenadas asociado a la primera articulación, z_1, una cantidad igual a la longitud del primer eslabón, a_1. Por lo tanto:

$$p_1 = T_{z_1} p_0 \widetilde{T}_{z_1}, \text{ donde } T_{z_1} = 1 + a_1 \frac{e_\infty z_1}{2}. \tag{16}$$

Puesto que z_1 está alineado con el eje de la primera articulación, no cambia bajo la acción de la variable de articulación q_1 y, por lo tanto, el sistema de referencia global y el sistema de coordenadas asociado a la primera articulación tienen el mismo eje z.

De manera análoga, el punto p_3 es el resultado de trasladar el punto p a lo largo del eje z del sistema de coordenadas asociado a la última articulación, y que coincide con el eje z de la orientación predefinida para el elemento terminal, una cantidad igual a la longitud del último eslabón, a_6. Por lo tanto:

$$p_3 = T_z p \widetilde{T}_z, \text{ donde } T_z = 1 + a_6 \frac{e_\infty z}{2}. \tag{17}$$

Finalmente, para calcular el punto p_2, se definen el siguiente plano (que pasa por $\boldsymbol{p}_0$, $\boldsymbol{p}_1$ y $\boldsymbol{p}_3$) y las siguientes dos esferas (centradas en $\boldsymbol{p}_1$ y $\boldsymbol{p}_3$, y con radios a_2 y $(a_4 + d)$, respectivamente), cuyas representaciones son:

$$\begin{aligned} \pi^* &= p_0 \wedge p_1 \wedge p_3 \wedge e_\infty \\ s_1 &= p_1 - \frac{1}{2} a_2^2 e_\infty \\ s_2 &= p_3 - \frac{1}{2} (a_4^2 + d^2)^2 e_\infty \end{aligned} \tag{18}$$

Nótese que la esfera representada por s_2 tiene radio la hipotenusa definida por la longitud del eslabón y del desalineamiento. Además, el punto p_2 pertenece a la intersección de estos tres objetos geométricos. Para calcular dicha intersección, se utiliza la siguiente definición (Lavor et al., 2018, capítulo 4):

Definición 1. *Sean O_1 y O_2 dos objetos geométricos diferentes con representaciones externas K_1^* y K_2^*. La intersección entre O_1 y O_2, denotada como $K_1^* \vee K_2^*$, se define como el multivector $K_1^* \vee K_2^* = (K_1 \wedge K_2)^* = K_1 \cdot K_2^*$.*

Extendido a tres objetos geométricos con representaciones externas K_1^*, K_2^* y K_3^*, se tiene que:

$$K_1^* \vee K_2^* \vee K_3^* = (K_1 \wedge K_2 \wedge K_3)^*. \tag{19}$$

Ahora, dado que la representación interna de cualquier plano y esfera es un elemento de grado 1 de $\mathcal{G}_{4,1}$, $s_1 \wedge s_2 \wedge \pi$ es un elemento de grado 3 y, como consecuencia, su dual es un elemento de grado 2 en $\mathcal{G}_{4,1}$, es decir, un bivector. Por lo tanto:

$$B = s_1^* \vee s_2^* \vee \pi^* = (s_1 \wedge s_2 \wedge \pi)^* \tag{20}$$

es un bivector. Este bivector representa un par de puntos en álgebra geométrica conforme, por lo que $B = b_1 \wedge b_2$ para algunos vectores nulos b_1 y b_2. Es claro que p_2 es uno de estos dos vectores nulos. Para extraer cada uno de estos dos vectores

nulos, y en particular p_2, se utilizan las siguientes ecuaciones (Lasenby et al., 2004):

$$\begin{aligned} b_1 &= -\frac{1}{4}\left(1+\frac{\widetilde{B}}{B\widetilde{B}}\right)(B\cdot e_\infty)\left(1+\frac{B}{B\widetilde{B}}\right), \\ b_2 &= \frac{1}{4}\left(1+\frac{B}{B\widetilde{B}}\right)(B\cdot e_\infty)\left(1+\frac{\widetilde{B}}{B\widetilde{B}}\right), \end{aligned} \tag{21}$$

Solo queda encontrar el valor de las variables articulares. Dado que todas las articulaciones son de revolución, sus variables articulares son ángulos. Por tanto, primero se necesita construir diferentes objectos geométricos a partir de los puntos calculados (p_0, p_1, p_2 y p_3) de forma que los ángulos entre pares de ellos coincidan con el valor de las variables de articulación. En particular, se definen las siguientes cuatro rectas y dos planos:

$$\begin{aligned} \ell_1^* &= p_0 \wedge p_1 \wedge e_\infty, & \ell_4^* &= p_3 \wedge p \wedge e_\infty, \\ \ell_2^* &= p_1 \wedge p_2 \wedge e_\infty, & \pi_1 &= \boldsymbol{x}_1, \\ \ell_3^* &= p_2 \wedge p_3 \wedge e_\infty, & \pi_2^* &= p_2 \wedge p_2 \wedge p_3 \wedge e_\infty. \end{aligned} \tag{22}$$

Finalmente, utilizando los objetos geométricos definidos en las ecuaciones (15), (18) y (22), se obtienen las variables articulares:

$$\begin{aligned} \theta_1 &= \angle(\pi_1^*, \pi^*), \quad \theta_3 = \angle(\ell_2^*, \ell_3^*), \quad \theta_5 = \angle(\ell_z^*, \ell_3^*), \\ \theta_2 &= \angle(\ell_1^*, \ell_2^*), \quad \theta_4 = \angle(\ell_z^*, \pi_2^*), \quad \theta_6 = \angle(\ell_x^*, \ell_4^*), \end{aligned} \tag{23}$$

donde $\angle(\cdot,\cdot)$ denota el ángulo principal definido por dos objetos geométricos, que dadas sus representaciones externas K_1^* y K_2^*, se define como:

$$\angle(K_1^*, K_2^*) = \cos^{-1}\left(\frac{K_1^* \cdot K_2^*}{K_1^*\widetilde{K}_1^* K_2^* \widetilde{K}_2^*}\right). \tag{24}$$

5. Conclusiones

En este trabajo, se ha abordado el problema de la cinemática inversa de los robots manipuladores serie sin muñeca esférica. En particular, se ha demostrado que para cualquier configuración $\boldsymbol{q} \in C$, existe un rotor $M \in \mathcal{G}_{4,1}$ tal que $P' = MP\widetilde{M}$ representa la posición y orientación del elemento terminal del robot respecto del sistema de referencia global P (la posición y orientación de su base). Además, se ha desarrollado un método geométrico basado en la definición y manipulación de diversos objetos geométricas para resolver la cinemática inversa de robots manipuladores serie sin muñeca esférica y que, junto con el método introducido por Lavor et al. (2018); Zaplana et al. (2022), proporciona un método general para tratar la cinemática inversa de robots manipuladores serie de 6 GdL arbitrarios. Se puede observar que ambos métodos tienen algunas similitudes, por lo que de manera natural surge la pregunta de si existe o no un método geométrico más general con el que tratar de resolver el problema de la cinemática inversa independientemente de la presencia o no de muñeca esférica. Asimismo, también surge la pregunta de si existe algún método numérico basado en el álgebra geométrica conforme que resuelva este mismo problema, en especial para robots sin muñeca esférica. Estas dos preguntas serán objeto de estudio en el futuro.

Agradecimientos

Este artículo ha sido financiado por la Agencia Estatal de Investigación a través del proyecto con referencia PID2020-114819GB-I00. El autor Isiah Zaplana agradece al programa Maria Zambrano para la atracción del talento internacional (ref. 2022UPC-MZC-94008) del Ministerio de Universidades.

Referencias

Baker, D. R., Wampler, C. W., March 1987. Some facts concerning the inverse kinematics of redundant manipulators. In: IEEE International Conference on Robotics and Automation (ICRA), Raleigh, NC, USA. pp. 604 – 609.

Baker, D. R., Wampler, C. W., April 1988. On the inverse kinematics of redundant manipulators. International Journal of Robotics Research 7 (2), 3 – 21.

Bayro-Corrochano, E., Zamora-Esquivel, J., 2007. Differential and inverse kinematics of robot devices using conformal geometric algebra. Robotica 25 (1), 43–61.

Campos-Macías, L., Carbajal-Espinosa, O., Loukianov, A., Bayro-Corrochano, E., 2017. Inverse kinematics for a 6-DOF walking humanoid robot leg. Advances in Applied Clifford Algebras 27 (1), 581–597.

Doran, C., Lasenby, A., 2003. Geometric Algebra for Physicists. Cambridge University Press.

Hildenbrand, D., Zamora, J., Bayro-Corrochano, E., 2008. Inverse kinematics computation in computer graphics and robotics using conformal geometric algebra. Advances in Applied Clifford Algebras 18 (3), 699–713.

Kucuk, S., Bingul, Z., 2014. Inverse kinematics solutions for industrial robot manipulators with offset wrists. Applied Mathematical Modelling 38 (7), 1983 – 1999.

Lasenby, A., Lasenby, J., Wareham, R., 2004. A convariant approach to geometry using geometric algebra. Tech. rep., Department of Engineering, University of Cambridge.

Lavor, C., Xambó-Descamps, S., Zaplana, I., 2018. A Geometric Algebra Invitation to Space-Time Physics, Robotics and Molecular Geometry. SBMAC/SpringerBriefs. Springer.

Pan, H., Fu, B., Chen, L., Feng, J., 2012. The inverse kinematics solutions of robot manipulators with offset wrist using the offset modification method. In: Selected Papers from the International Conference on Automation and Robotics (ICAR 2011): Advances in Automation and Robotics, Vol.1. Springer Berlin Heidelberg, pp. 655 – 663.

Paul, R. P., 1981. Robot Manipulators: Mathematics, Programming and Control. The MIT Press.

Pieper, D. L., 1968. The kinematics of manipulation under computer control. Ph.D. thesis, Stanford Artificial Intelligence Laboratory - Stanford University.

Siciliano, B., Sciavicco, L., Villani, L., Oriolo, G., 2008. Robotics: Modelling, Planning and Control. Springer Publishing Company, Incorporated.

Tørdal, S. S., Hovland, G., Tyapin, I., 2017. Efficient implementation of inverse kinematics on a 6-DOF industrial robot using conformal geometric algebra. Advances in Applied Clifford Algebras 27 (3), 2067–2082.

Zamora, J., Bayro-Corrochano, E., 28 September - 2 October 2004. Inverse kinematics, fixation and grasping using conformal geometric algebra. In: IEEE/RSJ International Conference on Intelligent Robots and Systems (IROS), Sendai, Japan. Vol. 4. pp. 3841–3846.

Zaplana, I., Claret, J., Basáñez, L., 2018. Kinematic analysis of redundant robotic manipulators: applications to Kuka LWR 4+ and ABB Yumi. Revista Iberoamericana de Automática e Informática Industrial 15 (3), 192–202.

Zaplana, I., Hadfield, H., Lasenby, J., 2022. General closed-form solutions for the inverse kinematics of serial robots using conformal geometric algebra. Mechanism and Machine Theory 173, 104835.

Zhou, X., Xian, Y., Chen, Y., Chen, T., Yang, L., Chen, S., Huang, J., 2022. An improved inverse kinematics solution for 6-dof robot manipulators with offset wrists. Robotica 40 (7), 2275–2294.