

APREHENSIÓN ÓPTIMA DE OBJETOS 2D MEDIANTE CUATRO DEDOS SIN FRICCIÓN: ANÁLISIS Y APLICACIÓN *

Jordi Cornellà Raúl Suárez

Institut d'Organització i Control de Sistemes Industrials (IOC-UPC)

Av. Diagonal 647 Planta 11, 08028 Barcelona, SPAIN

Emails: jordi.cornella@upc.es, raul.suarez@upc.es

Resumen

En este artículo se trata el problema de la determinación de aprehensiones óptimas de objetos poligonales (2D) teniendo en cuenta la inmovilidad del objeto respecto a la mano (propiedad de force-closure). Se realiza un análisis del problema obteniendo como resultado algunas propiedades intrínsecas a la aprehensión útiles en la determinación de la configuración óptima. Mediante el uso de estas propiedades se desarrolla un algoritmo para solucionar el caso particular de determinar la posición de un cuarto punto de contacto a partir de tres conocidos, obteniendo el rango de posiciones que permiten force-closure y la posición óptima de forma analítica, teniendo que evaluar como máximo cuatro puntos. El algoritmo ha sido implementado y se incluyen aquí algunos ejemplos numéricos.

1 INTRODUCCIÓN

La aprehensión y manipulación de objetos usando manos mecánicas es un campo de gran interés en las dos últimas décadas. En [13] y [2] se detallan los principales conceptos y los problemas asociados a la utilización de este tipo de dispositivos.

Las aprehensiones capaces de resistir fuerzas externas de perturbación en cualquier dirección satisfacen una de las siguientes propiedades: “form-closure” (la posición de los dedos asegura la inmovilidad del objeto) o “force-closure” (las fuerzas aplicadas por los dedos aseguran la inmovilidad del objeto) [1]. Uno de los problemas más frecuentes es encontrar la configuración de la aprehensión óptima en base a una de estas dos propiedades, lo que implica tener que escoger un criterio de calidad para evaluar la aprehensión.

*Este trabajo está parcialmente financiado por los proyectos CICYT DPI2001-2202 y DPI2002-03540.

De entre los propuestos, cabe destacar el criterio de Ferrari y Canny [5], quienes tienen en cuenta la máxima fuerza generalizada externa que la aprehensión puede equilibrar en cualquier dirección. En base a este criterio, Pollard [12] y Borst et al. [3], desarrollan algoritmos para la síntesis de aprehensiones, aunque sin llegar a generar aprehensiones óptimas. Ponce et al. [10] proponen como criterio la minimización de la distancia entre el centro de masa del objeto y el centro geométrico de los puntos de contacto. Este es el criterio utilizado en el algoritmo desarrollado por Ding et al. [4], entre otros.

Una variante del problema es la determinación de las máximas regiones sobre el objeto en las que los dedos aseguran la propiedad de form/force-closure (denominadas regiones independientes), proporcionando de este modo robustez a la aprehensión frente a errores de posicionamiento. En esta línea cabe destacar los trabajos de Ponce et al. [11] y Nguyen [9].

En general, los algoritmos propuestos para la búsqueda de aprehensiones óptimas están basados en programación lineal o no lineal, lo que implica un procedimiento iterativo. En este artículo se trata el problema de encontrar la aprehensión óptima (en el sentido de la aprehensión más robusta frente a fuerzas externas de perturbación) de objetos 2D utilizando el número mínimo de contactos sin fricción (cuatro para objetos 2D [8]), la medida de calidad propuesta por Ferrari y Canny, y evitando procedimientos iterativos. Se presentan algunas propiedades intrínsecas a la aprehensión útiles para solucionar el problema y, en particular, se resuelve de forma analítica la posición óptima de un cuarto dedo conociendo las posiciones de otros tres (este problema ya ha sido resuelto incluso para objetos 3D [4], pero el algoritmo que aquí se presenta no requiere procesos iterativos). La solución de este problema es de especial relevancia en acciones

de re-aprehensión. Las principales asunciones consideradas en este trabajo son:

1. Los objetos son planos y de forma poligonal.
2. El lado en el que el cuarto dedo contactará es conocido.
3. Las fuerzas aplicadas por los dedos actúan empujando el objeto (restricción de positividad).
4. Contactos sin fricción (la solución de force-closure es también form-closure).
5. El contacto es puntual.

Nótese que no existe ninguna restricción en el número de dedos por lado, por lo que, mediante este método, es posible considerar dos dedos en un mismo lado (en objetos poligonales es necesario un mínimo de tres puntos de contacto en lados diferentes para que la propiedad de force-closure sea posible).

2 MEDIDA DE CALIDAD DE LA APREHENSIÓN

2.1 EN EL ESPACIO DE FUERZAS GENERALIZADAS

Uno de los criterios más intuitivos y aceptados para la evaluación de la calidad de una aprehensión que posee la propiedad de force-closure (a partir de ahora denominada aprehensión FC) fue propuesto por Ferrari y Canny [5]. Este criterio tiene en cuenta el máximo módulo de la fuerza generalizada que una aprehensión puede resistir en cualquier dirección: cuando mayor es el módulo, mejor es la aprehensión.

Cada dedo puede realizar una fuerza \mathbf{f}_i sobre el contorno del objeto en el punto de contacto que, en ausencia de fricción, es normal al contorno del objeto. La fuerza \mathbf{f}_i produce un momento $\boldsymbol{\tau}_i$ respecto al centro de masa del objeto, y al vector $\boldsymbol{\omega}_i = \begin{pmatrix} \mathbf{f}_i^T & \lambda \boldsymbol{\tau}_i^T \end{pmatrix}^T$ se le denomina fuerza generalizada (λ define una métrica común en el espacio de fuerzas generalizadas, siendo su sentido físico en términos de energía el brazo de palanca del momento de primer orden del objeto; la metodología que se propone es válida para cualquier valor de λ , por lo que, por simplicidad, se considera $\lambda = 1$).

Las fuerzas aplicadas por los dedos pueden estar sujetas a diferentes restricciones, dependiendo de la característica que se desea optimizar. La restricción utilizada en este trabajo (otras restricciones con su sentido físico y geométrico

pueden encontrarse en [8]) es que la fuerza total ejercida por todos los dedos está limitada, por ejemplo, debido a la máxima potencia disponible para todos los actuadores de los dedos. Esto implica que las fuerzas aplicadas pueden generar una fuerza generalizada resultante $\boldsymbol{\omega} = \sum_i \beta_i \boldsymbol{\omega}_i$ con $\sum_i \beta_i \leq 1$ y siendo $\boldsymbol{\omega}_i$ la fuerza generalizada producida por las fuerzas que satisfacen $\|\mathbf{f}_i\| = 1$. Geométricamente, la fuerza generalizada resultante puede ser cualquiera que esté dentro del politopo

$$\mathcal{P}_1 = \text{ConvexHull}\left(\bigcup_{i=1}^n \{\boldsymbol{\omega}_i\}\right) \quad (1)$$

Considerando esta restricción, la medida de calidad Q de una aprehensión FC se determina mediante la máxima fuerza generalizada que las fuerzas aplicadas por los dedos pueden generar en cualquier dirección del espacio de fuerzas generalizadas:

$$Q = \min_{\boldsymbol{\omega} \in \partial \mathcal{P}_1} \|\boldsymbol{\omega}\| \quad (2)$$

donde $\partial \mathcal{P}_1$ es el contorno del politopo \mathcal{P}_1 .

En el caso de objetos 2D, \mathcal{P}_1 es un poliedro y la medida de calidad es equivalente al radio de la mayor esfera centrada en el origen y contenida en el poliedro \mathcal{P}_1 .

La medida de calidad Q se determina por una de las distancias entre el origen y las caras de \mathcal{P}_1 . Considérense tres fuerzas generalizadas $\boldsymbol{\omega}_i$ ($i = 1, \dots, 3$) expresadas en coordenadas cilíndricas como $\boldsymbol{\omega}_i = (\cos \alpha_i, \sin \alpha_i, \tau_i)$, siendo α_i el ángulo que indica la dirección de \mathbf{f}_i . La distancia D del origen a la cara (plano) de \mathcal{P}_1 determinada por $\boldsymbol{\omega}_1$, $\boldsymbol{\omega}_2$ y $\boldsymbol{\omega}_3$ puede ser escrita en función del momento de una de ellas; por ejemplo, considerando D en función de τ_3 de $\boldsymbol{\omega}_3$, se obtiene:

$$D(\tau_3) = \left| \frac{k_1 + k_2 \tau_3}{\sqrt{(k_3 + k_4 \tau_3)^2 + (k_5 + k_6 \tau_3)^2 + k_7^2}} \right| \quad (3)$$

donde:

$$k_1 = \sin(\alpha_3 - \alpha_2) \tau_1 + \sin(\alpha_1 - \alpha_3) \tau_2 \quad (4)$$

$$k_2 = \sin(\alpha_2 - \alpha_1) \quad (5)$$

$$k_3 = (\sin \alpha_2 - \sin \alpha_3) \tau_1 + (\sin \alpha_3 - \sin \alpha_1) \tau_2 \quad (6)$$

$$k_4 = \sin \alpha_1 - \sin \alpha_2 \quad (7)$$

$$k_5 = (\cos \alpha_3 - \cos \alpha_2) \tau_1 + (\cos \alpha_1 - \cos \alpha_3) \tau_2 \quad (8)$$

$$k_6 = (\cos \alpha_2 - \cos \alpha_1) \quad (9)$$

$$k_7 = \sin(\alpha_2 - \alpha_3) + \sin(\alpha_3 - \alpha_1) + \sin(\alpha_1 - \alpha_2) \quad (10)$$

Esta función tiene cuatro propiedades importantes (la Figura 1 ilustra un ejemplo):

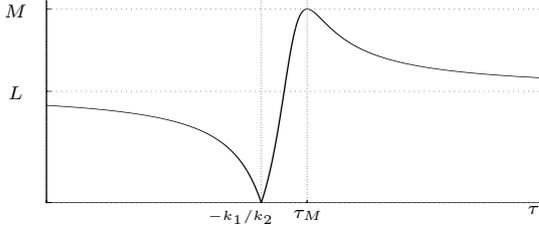


Figura 1: Forma cualitativa de la distancia $D(\tau)$

1. Es una función continua (el denominador sólo puede ser cero si todas las fuerzas están en la misma dirección, lo que no es posible en una aprehensión FC).
2. Es cero en $\tau_3 = -k_1/k_2$
3. Tiende a un valor positivo finito cuando $\tau_3 \rightarrow \pm\infty$,
 $L = \lim_{\tau_3 \rightarrow \pm\infty} D(\tau_3) = k_2 / \sqrt{(k_4^2 + k_6^2)}$.
4. Tiene sólo un máximo M en

$$\tau_{M} = \frac{(k_3^2 + k_7^2 + k_5^2)k_2 - (k_3k_4 + k_5k_6)k_1}{-k_2(k_3k_4 + k_5k_6) + k_1(k_4^2 + k_6^2)} \quad (11)$$

2.2 EN EL SUBESPACIO DE FUERZAS

De forma similar a como Mirtich y Canny [6] aplican la medida de calidad a dos conjuntos particulares de fuerzas y momentos, la medida de calidad descrita en la ecuación (2) puede ser aplicada en el subespacio de fuerzas, es decir, el subespacio 2D del espacio de fuerzas generalizadas definido por fuerzas puras, con lo que se obtiene:

$$Q_f = \min_{\omega \in \partial \mathcal{P}_f} \|\omega\| \quad (12)$$

donde \mathcal{P}_f es el polígono definido en el subespacio de fuerzas por las fuerzas de contacto y $\partial \mathcal{P}_f$ es su contorno (\mathcal{P}_f coincide con la proyección de \mathcal{P}_1 en el subespacio de fuerzas).

Proposición 1 Considérense tres fuerzas generalizadas que definen una cara del casco convexo \mathcal{P}_1 . Si la componente τ de una de ellas tiende a $\pm\infty$, la distancia entre el origen del espacio de fuerzas generalizadas y la cara tiende a la distancia entre el origen y la recta definida por las componentes de fuerza de las otras dos fuerzas generalizadas en el subespacio de fuerzas. \diamond

Demostración: La demostración es directa a partir de la propiedad 3 de la distancia descrita en la ecuación (3). Si las constantes k_2 , k_4 y k_6 son sustituidas por sus expresiones (ecuaciones (5),(7) y (9), respectivamente) se obtiene la distancia entre el origen y $\overline{f_1 f_2}$. \diamond

Lemma 1 La medida de calidad en el subespacio de fuerzas, Q_f , es una cota máxima para la medida de calidad de la aprehensión Q . \diamond

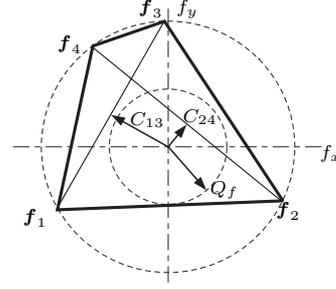


Figura 2: Ejemplo de Cota Máxima Q_f y Cotas Interiores C_{24} y C_{13} .

Demostración: Considérese un prisma \mathcal{P}_1^∞ en el espacio de fuerzas generalizadas de aristas infinitas paralelas al eje τ , tal que la intersección de \mathcal{P}_1^∞ con el subespacio de fuerzas es \mathcal{P}_f . El radio de la mayor esfera centrada en el origen e inscrita en \mathcal{P}_1^∞ equivale a la mínima distancia del origen a \mathcal{P}_f , es decir, Q_f .

Dados los momentos que producen las cuatro fuerzas de contacto, las correspondientes fuerzas generalizadas generan un poliedro \mathcal{P}_1 que, por construcción, satisface $\mathcal{P}_1 \subset \mathcal{P}_1^\infty$. Esto implica que la mayor esfera centrada en el origen e inscrita en \mathcal{P}_1 es más pequeña o igual a la inscrita en \mathcal{P}_1^∞ , con lo que el radio máximo posible es Q_f . \diamond

Definición 1 Se define como *Cota Interna*, C_{ij} , de una aprehensión la distancia entre el origen del espacio de fuerzas y el segmento determinado por dos vértices no consecutivos f_i y f_j de \mathcal{P}_f . \diamond

Nótese que una aprehensión con cuatro puntos de contacto sin fricción tiene dos Cotas Internas. Si las cuatro fuerzas aplicadas tienen diferentes direcciones, \mathcal{P}_f es un polígono cuadrilátero y las Cotas Internas son las distancias entre el origen y cada una de las diagonales del polígono, mientras que si existen dos fuerzas paralelas (es decir, dos puntos de contacto están posicionados en el mismo lado) \mathcal{P}_f degenera en un triángulo y las Cotas Internas son las distancias entre el origen y dos lados del triángulo. La Figura 2 ilustra un ejemplo de las Cotas internas.

3 CÁLCULO DEL CUARTO PUNTO DE CONTACTO

Geoméricamente, el problema específico de determinar la posición óptima del cuarto dedo sobre un lado dado es: dados tres puntos en el espacio de fuerzas generalizadas (i.e. $\omega_1, \omega_2, \omega_3$) y la fuerza aplicada $f_4 = (f_{x4}, f_{y4})^T$, determinar la componente τ_4 tal que el poliedro \mathcal{P}_1 definido por $\omega_1, \omega_2,$

ω_3 y $\omega_4 = (f_{4x}, f_{4y}, \tau_4)^T$ incluya la mayor esfera posible centrada en el origen.

3.1 RANGO DE SOLUCIONES

Para producir una aprehensión FC es condición necesaria y suficiente que el poliedro \mathcal{P}_1 formado por ω_1 , ω_2 , ω_3 y ω_4 contenga el origen [7]. A partir de esta condición se enuncia la siguiente condición necesaria y suficiente.

Condición necesaria y suficiente. Sea R_{fc_4} el rango de valores de τ_4 que permiten una aprehensión FC conociendo ω_1 , ω_2 , ω_3 y \mathbf{f}_4 , y sea ∂R_{fc_4} el contorno de R_{fc_4} . Para que un valor τ_4^* satisfaga $\tau_4^* \in \partial R_{fc_4}$ es condición necesaria y suficiente que $0 \in \partial \mathcal{P}_1$ siendo \mathcal{P}_1 el poliedro definido por ω_1 , ω_2 , ω_3 y $\omega_4 = (f_{4x}, f_{4y}, \tau_4^*)^T$. \diamond

Demostración: Es directa debido a que \mathcal{P}_1 es convexo. \diamond

A partir de esta condición, el procedimiento para determinar los extremos de R_{fc_4} es el siguiente: primero se obtienen tres candidatos mediante la intersección de los tres planos definidos por $\{\omega_2, \omega_3, 0\}$, $\{\omega_1, \omega_3, 0\}$ y $\{\omega_1, \omega_2, 0\}$, con la recta determinada por $x = f_{x4}$, $y = f_{y4}$, obteniendo

$$\tau_{4j} = \frac{-A_{limj}f_{x4} - B_{limj}f_{y4}}{C_{limj}} \quad (13)$$

donde A_{limj} , B_{limj} and C_{limj} son los coeficientes de cada plano para $j = 1, \dots, 3$.

Estos tres candidatos se evalúan mediante la condición de force-closure (es decir, \mathcal{P}_1 debe contener al origen)

$$\beta_{1j}(f_{x1}, f_{y1}, \tau_1)^T + \beta_{2j}(f_{x2}, f_{y2}, \tau_2)^T + \beta_{3j}(f_{x3}, f_{y3}, \tau_3)^T = (f_{x4}, f_{y4}, \tau_{4j})^T \quad (14)$$

donde $\beta_{ij} \leq 0$ para $i = 1, \dots, 3$. Sólo uno o dos de los tres candidatos τ_{4j} pueden ser extremos válidos de R_{fc_4} .

Dependiendo del número de extremos válidos de R_{fc_4} el tipo de rango puede ser:

Rango Infinito: si sólo un valor de τ_{4j} satisface la condición necesaria y suficiente (denominado τ_{4k}) entonces $R_{fc_4} = [\tau_{4k}, \infty)$ ó $R_{fc_4} = (-\infty, \tau_{4k}]$, de forma que no contenga los otros dos τ_{4j} con $j \neq k$.

Rango Acotado: si dos valores τ_{4j} satisfacen la condición necesaria y suficiente (denominados τ_{4k} y τ_{4l}) entonces $R_{fc_4} = [\tau_{4k}, \tau_{4l}]$.

Proposición 2 Dadas cuatro fuerzas generalizadas ω_i con $i=1, \dots, 4$, el tipo de rango R_{fc_i} de cada τ_i , es independiente del valor de las

componentes τ_i , con lo que puede ser determinado solamente a partir de las fuerzas \mathbf{f}_i (esto equivale a que el tipo de rango puede ser automáticamente determinado conociendo los lados del objeto en que los dedos contactarán, independientemente del punto exacto de contacto). \diamond

Demostración: Sin pérdida de generalidad, se demuestra que el rango de R_{fc_4} (es decir, para τ_4) no depende de las componentes τ_1 , τ_2 y τ_3 de ω_1 , ω_2 y ω_3 , respectivamente.

Los candidatos a ser extremos de R_{fc_4} se obtienen de la ecuación (13) como una función en la que sólo intervienen dos fuerzas generalizadas (considérese por ejemplo $j = 1$, es decir, el candidato τ_{41} obtenido mediante ω_2 y ω_3). Esto implica que uno de los coeficientes β_{i1} de la ecuación (14) es nulo cuando se aplica la condición suficiente; en el caso del candidato τ_{41} resulta $\beta_{11} = 0$, con lo que la ecuación (14) puede ser expresada de la siguiente forma:

$$\beta_{21}f_{x2} + \beta_{31}f_{x3} = f_{x4} \quad (15)$$

$$\beta_{21}f_{y2} + \beta_{31}f_{y3} = f_{y4} \quad (16)$$

$$\beta_{21}\tau_2 + \beta_{31}\tau_3 = \tau_{41} \quad (17)$$

obtiendo un sistema de tres ecuaciones y dos incógnitas, β_{21} y β_{31} . Esto implica que una de estas tres igualdades es linealmente dependiente de las otras dos. Si \mathbf{f}_2 y \mathbf{f}_3 tienen direcciones diferentes, (15) y (16) son linealmente independientes entre ellas, por lo que la ecuación (17) es dependiente y puede omitirse. Como resultado, se obtiene β_{21} y β_{31} en función de \mathbf{f}_2 y \mathbf{f}_3 de la siguiente forma:

$$\beta_{31} = \frac{\sin(\alpha_4 - \alpha_2)}{\sin(\alpha_3 - \alpha_2)} \quad (18)$$

$$\beta_{21} = \frac{\cos(\alpha_4)\sin(\alpha_3 - \alpha_2) - \cos(\alpha_3)\sin(\alpha_4 - \alpha_2)}{\cos(\alpha_2)\sin(\alpha_3 - \alpha_2)} \quad (19)$$

donde α_i es el ángulo que indica la dirección de \mathbf{f}_i en el subespacio de fuerza. De acuerdo con la ecuación (14), si $\beta_{21} \leq 0$ y $\beta_{31} \leq 0$ entonces τ_{41} es un extremo de R_{fc_4} (aún sin conocer el valor exacto de τ_{41} !). De la misma forma, se obtienen β_{12} y β_{13} para τ_{42} , y β_{23} y β_{33} para τ_{43} . El análisis de sus signos determina si τ_{42} y τ_{43} son extremos de R_{fc_4} .

Si dos de las fuerzas tienen la misma dirección (es decir, dos dedos están posicionados en el mismo lado), las ecuaciones (15) y (16) no tienen solución y el correspondiente candidato no existe. Como es necesario que dos de las tres fuerzas tengan direcciones diferentes, siempre existen como mínimo dos candidatos.

Esto demuestra que, aunque τ_{41} , τ_{42} y τ_{43} no sean conocidos, es posible determinar cuántos de ellos son extremos de R_{fc_4} y, por consiguiente, el tipo de rango.

El procedimiento es análogo para R_{fc_1} , R_{fc_2} y R_{fc_3} . \diamond

3.2 VALOR ÓPTIMO

Proposición 3 Dadas tres fuerzas generalizadas, ω_i , ω_j y ω_k (con $\{i, j, k\} = \{1, 2, 3\}$) y \mathbf{f}_4 , el valor de τ_4 con el que se obtiene la aprehensión óptima (τ_{4opt}) puede determinarse analíticamente de acuerdo con los siguientes cuatro casos. Sea C_{ij} la Cota Interna que no depende de \mathbf{f}_4 y D_ρ la distancia entre el origen y el plano definido por ω_ν , ω_σ , y ω_4 , con $\{\rho, \nu, \sigma\} = \{i, j, k\}$, entonces:

Caso 1: R_{fc_4} es Infinito y $C_{ij} \geq Q_f$:

$\tau_{4opt} = \pm\infty$ según sea R_{fc_4} .

Caso 2: R_{fc_4} es Acotado y $C_{ij} \geq Q_f$:

Existen tres candidatos para τ_{4opt} dados por las soluciones de las ecuaciones

$$D_i(\tau_4) = D_j(\tau_4) \quad (20)$$

$$D_i(\tau_4) = D_k(\tau_4) \quad (21)$$

$$D_j(\tau_4) = D_k(\tau_4) \quad (22)$$

Caso 3: R_{fc_4} es Acotado y $C_{ij} < Q_f$:

Existen cuatro candidatos para τ_{4opt} dados por los tres obtenidos en el Caso 2 más el valor de τ_4 que maximiza D_k , es decir, la solución de la ecuación

$$\frac{\partial D_k(\tau_4)}{\partial \tau_4} = 0 \quad (23)$$

Si más de uno de estos candidatos pertenece a R_{fc_4} es necesario evaluarlos para identificar

τ_{4opt} .

Caso 4: R_{fc_4} es Infinito y $C_{ij} < Q_f$:

Existen tres candidatos para τ_{4opt} dados por las soluciones de las ecuaciones

$$D_k(\tau_4) = D_i(\tau_4) \quad (24)$$

$$D_k(\tau_4) = D_j(\tau_4) \quad (25)$$

$$\frac{\partial D_k(\tau_4)}{\partial \tau_4} = 0 \quad (26)$$

Si ninguno de estos candidatos pertenece a R_{fc_4} entonces $\tau_{4opt} = \pm\infty$ según sea R_{fc_4} . \diamond

Demostración: Las demostraciones de los cuatro casos están basadas en los siguientes conceptos:

- $Q_f > Q(\tau_4) \forall \tau_4 \in R_{fc_4}$.
- $L_\rho = \lim_{\tau_4 \rightarrow \pm\infty} D_\rho(\tau_4)$ es finito ($\rho = i, j, k$).
- $D_\rho(\tau_4)$ tiene sólo un máximo M_ρ ($\rho = i, j, k$).

- $Q(\tau_4)$ es una función definida por partes de $D_\rho(\tau_4)$ ($\rho = i, j, k$).

Caso 1: R_{fc_4} es Infinito, $C_{ij} \geq Q_f$

1. Si $C_{ij} \geq Q_f \Rightarrow \forall \rho \ L_\rho \geq Q_f$, $\rho = i, j, k$.
2. $D_\rho(\tau_4)$ tiene sólo un máximo M_ρ .
3. A partir de 1 y 2 se obtiene que $M_\rho > Q_f$.
4. A partir de 3, resulta $Q(\tau_4) < M_\rho$, entonces, a partir de 2, todas las partes de $D_\rho(\tau_4)$ que definen $Q(\tau_4)$ son monótonas.
5. Si R_{fc_4} es Infinito existe sólo un valor τ_4^* para el que $Q(\tau_4^*) = 0$, entonces, a partir de 4, las partes de $D_\rho(\tau_4)$ que pertenecen a $Q(\tau_4)$ son crecientes si $R_{fc_4} = [\tau_4^*, \infty)$ o decrecientes si $R_{fc_4} = (-\infty, \tau_4^*]$, por lo que $\tau_{4opt} = \pm\infty$ según sea R_{fc_4} .

Caso 2: R_{fc_4} es Acotado, $C_{ij} \geq Q_f$

1. Se repiten los mismos pasos 1 a 4 del Caso 1, con lo que se obtiene que las partes de $D_\rho(\tau_4)$ que definen $Q(\tau_4)$ son monótonas.
2. Si R_{fc_4} es Acotado existen dos valores τ_{41}^* y τ_{42}^* para los que $Q(\tau_{41}^*) = Q(\tau_{42}^*) = 0$, por lo que existen partes crecientes y decrecientes en $Q(\tau_4)$.
3. A partir de 1 y 2, el valor óptimo de $Q(\tau_4)$ se localiza donde una parte creciente y una decreciente intersectan.
4. Los valores de τ_4 donde dos partes de $Q(\tau_4)$ intersectan son las soluciones de las ecuaciones (20) a (22), siendo τ_{4opt} una de estas soluciones.

Caso 3: R_{fc_4} es Acotado, $C_{ij} < Q_f$

1. Si $C_{ij} < Q_f \Rightarrow L_\rho \geq Q_f$ con $\rho = i, j$.
2. Se repiten los mismos pasos 1 a 4 del Caso 1 pero considerando sólo los valores $\rho = i, j$. Se obtiene que todas las partes de $D_\rho(\tau_4)$ que definen $Q(\tau_4)$ son monótonas mientras que no se puede asegurar para las partes de $Q(\tau_4)$ de $D_k(\tau_4)$.
3. Se repite el paso 2 del Caso 2.
4. A partir de 2 y 3, el valor óptimo de $Q(\tau_4)$ está localizado en los puntos donde una parte creciente y decreciente intersectan, o donde $D_k(\tau_4)$ tiene el máximo M_k (es decir, cambia el signo de la pendiente de $D_k(\tau_4)$).
5. Los valores de τ_4 donde dos partes de $Q(\tau_4)$ intersectan son las soluciones de las ecuaciones (20) a (22), el valor de τ_4 donde M_k tiene lugar es la solución de la ecuación (23), por lo que τ_{4opt} es una de estas soluciones.

Caso 4: R_{fc_4} Infinito, $C_{ij} < Q_f$

1. Se repiten los mismos pasos 1 y 2 del Caso 3, con lo que se obtiene que las partes de $D_\rho(\tau_4)$ que definen $Q(\tau_4)$ son monótonas para $\rho = i, j$ mientras que no se puede asegurar que las partes de $Q(\tau_4)$ definidas por $D_k(\tau_4)$ lo sean.
2. Si R_{fc_4} es Infinito sólo existe un valor τ_4^* para

el que $Q(\tau_4^*) = 0$.

3. A partir de 1 y 2, las partes de $Q(\tau_4)$ definidas por $D_\rho(\tau_4)$ son crecientes si $R_{fc_4} = [\tau_4^*, \infty)$ o decrecientes si $R_{fc_4} = (-\infty, \tau_4^*]$, mientras que no se puede asegurar para las partes de $Q(\tau_4)$ definidas por $D_k(\tau_4)$.
4. A partir de 3, cualquier cambio de signo de la pendiente de $Q(\tau_4)$ implica a $D_k(\tau_4)$.
5. Los valores de τ_4 donde cambia el signo de la pendiente de $Q(\tau_4)$ son las soluciones de las ecuaciones (24) a (26) siendo τ_{4opt} una de estas soluciones. \diamond

3.3 RESTRICCIÓN DE LA LONGITUD DE LOS LADOS

Es posible que el valor óptimo de τ_4 encontrado por el método anterior no pueda ser alcanzado debido a que la longitud de los lados es finita. Esta restricción se tiene en cuenta en esta sección.

La longitud del lado donde se posiciona el cuarto dedo define un nuevo rango, R_4 , donde es físicamente posible ejecutar la aprehensión. Considerando R_4 , R_{fc_4} y τ_{4opt} existen tres casos posibles:

- $R_4 \cap R_{fc_4} = \emptyset$: No es posible obtener una aprehensión FC posicionando el dedo en el lado asignado.
- $R_4 \cap R_{fc_4} \neq \emptyset$ y $\tau_{4opt} \in (R_4 \cap R_{fc_4})$: La posición óptima real es la correspondiente a τ_{4opt} .
- $R_4 \cap R_{fc_4} \neq \emptyset$ y $\tau_{4opt} \notin (R_4 \cap R_{fc_4})$: La posición óptima real es el extremo de $(R_4 \cap R_{fc_4})$ más cercano a τ_{4opt} , debido a que la función $Q(\tau_4)$ crece de forma monótona hacia $Q(\tau_{4opt})$ dentro de R_{fc_4} .

Nótese que la posición óptima puede ser en un vértice del objeto, en este caso es necesario considerar una distancia de seguridad para asegurar la estabilidad del contacto.

3.4 PROCEDIMIENTO EFICIENTE

Cuando se aplica la Proposición 3, excepto en el Caso 1 donde τ_{4opt} se determina de forma directa, es necesario resolver tres ecuaciones de cuarto grado. Si estas ecuaciones se resuelven en la secuencia correcta es posible hallar el valor de τ_{4opt} sin tener que llegar a resolverlas todas. La secuencia correcta se determina mediante los siguientes pasos:

1. Verificar $R_4 \cap R_{fc_4} \neq \emptyset$.
2. Encontrar τ_4' de $D_j(\tau_4) = D_k(\tau_4)$, escogiendo j y k tal que:
 - Casos 2 y 3: $D_j(\tau_4)$ y $D_k(\tau_4)$ hacen $Q(\tau_4) = 0$.

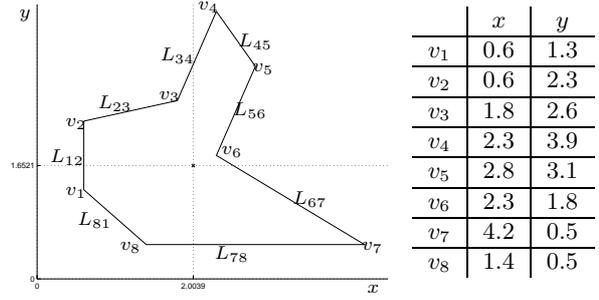


Figura 3: Objeto 2D y coordenadas de sus vértices

Caso 4: $D_j(\tau_4)$ hace $Q(\tau_4) = 0$ y $D_k(\tau_4) \rightarrow C_{ij}$ cuando $\tau_4 \rightarrow \pm\infty$.

3. Evaluar $D_\rho(\tau_4')$, $\rho = i, j, k$. Son posibles dos casos:
 - a. Si $D_i(\tau_4') \geq D_j(\tau_4') = D_k(\tau_4')$
No es necesario resolver $D_i(\tau_4) = D_j(\tau_4)$ y $D_i(\tau_4) = D_k(\tau_4)$ debido a que las soluciones de estas ecuaciones nunca pueden pertenecer a $Q(\tau_4)$. τ_4' es un candidato a ser τ_{4opt} .
 - b. Si $D_i(\tau_4') < D_j(\tau_4') = D_k(\tau_4') \Rightarrow \tau_{4opt} \neq \tau_4'$
Es necesario encontrar τ_4'' de $D_i(\tau_4) = D_j(\tau_4)$ y τ_4''' de $D_i(\tau_4) = D_k(\tau_4)$. τ_4'' y τ_4''' son candidatos a ser τ_{4opt} .
4. Casos 3 y 4: Además es necesario encontrar el valor τ_4'''' que maximiza $D_k(\tau_4)$. τ_4'''' es candidato a ser τ_{4opt} .
5. Calcular $D_\rho(\tau_4)$, $\rho = i, j, k$, para los correspondientes candidatos, y seleccionar como τ_{4opt} el candidato que produce el máximo mínimo.

4 EJEMPLOS

En este apartado se resuelve un ejemplo de cada uno de los casos posibles. La Figura 3 ilustra el objeto utilizado en los ejemplos. Para cada dedo i se dispone de los siguientes datos: el lado en el que se realiza el contacto, la dirección α_i de la fuerza aplicada (ortogonal al lado) y el rango $R_i = [\tau_{min_i}, \tau_{max_i}]$ de los momentos que se pueden realizar sobre el objeto.

Ejemplo del Caso 1. Los datos iniciales son:

| Dedo | Lado | α_i | τ_{min_i} | τ_{max_i} | τ_i |
|------|----------|------------|----------------|----------------|-----------------|
| 1 | L_{12} | 0 | -0.647 | 0.352 | -0.2 |
| 2 | L_{23} | 4.957 | 0.032 | 1.204 | 0.5 |
| 3 | L_{56} | 2.774 | 0.244 | 1.637 | 1 |
| 4 | L_{67} | 4.112 | -2.463 | -0.160 | τ_{4opt} ? |

Procedimiento:

1. $R_{fc_4} = (-\infty, -1.756] \Rightarrow R_4 \cap R_{fc_4} \neq \emptyset$
2. $Q_f = 0.182$ (determinado por $f_1 f_3$)
3. $C_{23} = 0.461$ (determinado por $f_2 f_3$)
4. $C_{23} > Q_f$, R_{fc_4} es Acotado \Rightarrow Caso 1

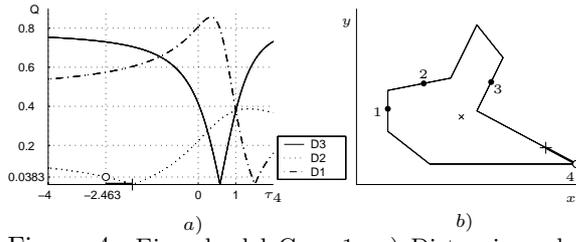


Figura 4: Ejemplo del Caso 1: a) Distancias a las caras de \mathcal{P}_1 , rango de posibles soluciones $R_4 \cap R_{fc_4}$ (segmento oscuro) y Q máximo (círculo blanco); b) soluciones posibles sobre el lado del objeto (segmento oscuro) y posición óptima del cuarto dedo (círculo blanco).

5. Entonces: $\tau_{4opt} = -\infty \notin R_4 \cap R_{fc_4}$
 Solución: $\tau_{4opt} = -2.463$ (extremo de L_{67}),
 $Q = D_2(\tau_{4opt}) = 0.0388$.

Las distancias a las caras desconocidas de \mathcal{P}_1 en función de τ_4 y la solución obtenida se ilustra en la Figura 4. La solución óptima es un extremo del lado tal como se indica en la figura; en una aprehensión real es conveniente considerar una distancia de seguridad al vértice.

Ejemplo del Caso 2. Los datos iniciales son:

| Dedo | Lado | α_i | τ_{min_i} | τ_{max_i} | τ_i |
|------|----------|------------|----------------|----------------|----------------|
| 1 | L_{12} | 0 | -0.647 | 0.352 | -0.1 |
| 2 | L_{45} | 3.700 | 0.805 | 1.749 | 1 |
| 3 | L_{67} | 4.112 | -2.463 | -0.160 | -2 |
| 4 | L_{81} | 0.785 | -0.743 | 0.387 | $\tau_{4opt}?$ |

Procedimiento:

- $R_{fc} = (-1.291, 0.662) \Rightarrow R_4 \cap R_{fc} \neq \emptyset$
- $Q_f = 0.113$ (Determinado por $f_2 f_4$)
- $C_{12} = 0.275$ (Determinado por $f_1 f_2$)
- $C_{12} \geq Q_f$, R_{fc} es Acotado \Rightarrow Caso 2.
- A partir de $D_1 = D_3 \Rightarrow \tau_4' = -0.854 \in R_{fc}$
- $\tau_4' \notin R_4 \Rightarrow \tau_4' = -0.743$ (extremo de R_4)

Entonces: $D_1(\tau_4') = 0.093$, $D_2(\tau_4') = 0.854$,
 $D_3(\tau_4') = 0.135$.

- $D_2(\tau_4') \geq D_3(\tau_4') \geq D_1(\tau_4')$

Solución: $\tau_{opt} = -0.743$, $Q = 0.093$.

Las distancias a las caras desconocidas de \mathcal{P}_1 en función de τ_4 y la solución obtenida se ilustra en la Figura 5. La solución óptima es un extremo del lado tal como se indica en la figura; en una aprehensión real es conveniente considerar una distancia de seguridad al vértice.

Ejemplo del Caso 3. Los datos iniciales son:

| Dedo | Lado | α_i | τ_{min_i} | τ_{max_i} | τ_i |
|------|----------|------------|----------------|----------------|----------------|
| 1 | L_{12} | 0 | -0.647 | 0.352 | 0.2 |
| 2 | L_{56} | 2.774 | 0.244 | 1.637 | 1 |
| 3 | L_{78} | 1.570 | -0.603 | 2.196 | 0.4 |
| 4 | L_{67} | 4.112 | -2.463 | -0.160 | $\tau_{4opt}?$ |

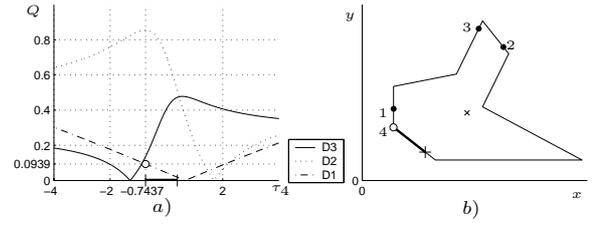


Figura 5: Ejemplo del Caso 2: a) Distancias a las caras de \mathcal{P}_1 , rango de posibles soluciones $R_4 \cap R_{fc_4}$ (segmento oscuro) y Q máximo (círculo blanco); b) soluciones posibles sobre el lado del objeto (segmento oscuro) y posición óptima del cuarto dedo (círculo blanco).

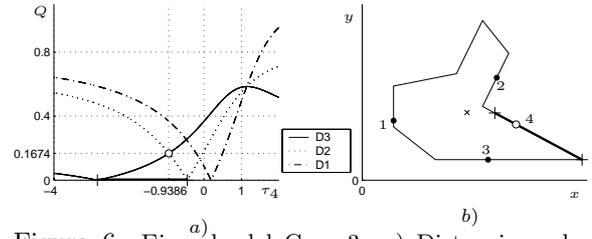


Figura 6: Ejemplo del Caso 3: a) Distancias a las caras de \mathcal{P}_1 , rango de posibles soluciones $R_4 \cap R_{fc_4}$ (segmento oscuro) y Q máximo (círculo blanco); b) soluciones posibles sobre el lado del objeto (segmento oscuro) y posición óptima del cuarto dedo (círculo blanco).

Procedimiento:

- $R_{fc_4} = [-2.840, -0.443] \Rightarrow R_4 \cap R_{fc_4} \neq \emptyset$
- $Q_f = 0.466$ (determinado por $f_1 f_4$)
- $C_{12} = 0.182$ (determinado por $f_1 f_2$)
- $C_{12} < Q_f$, R_{fc_4} es Acotado \Rightarrow Caso 3.
- $D_3 = D_2 \Rightarrow \tau_4' = -0.938 \in R_{fc_4} \cap R_4$

Entonces: $D_1(\tau_4') = 0.368$,
 $D_2(\tau_4') = D_3(\tau_4') = 0.167$.

- $D_1(\tau_4') \geq D_3(\tau_4') = D_2(\tau_4')$
- $\partial D_3 / \partial \tau_4 = 0 \Rightarrow \tau_4'''' = 1.1537 \notin R_{fc_4}$

Solución: $\tau_{4opt} = -0.938$, $Q = 0.167$.

Las distancias a las caras desconocidas de \mathcal{P}_1 en función de τ_4 y las solución obtenida se ilustran en la Figura 6.

Ejemplo del Caso 4. Los datos iniciales son:

| Dedo | Lado | α_i | τ_{min_i} | τ_{max_i} | τ_i |
|------|----------|------------|----------------|----------------|----------------|
| 1 | L_{34} | 5.916 | -2.204 | -0.811 | -1 |
| 2 | L_{45} | 3.700 | 0.805 | 1.749 | 1 |
| 3 | L_{81} | 0.785 | -0.743 | 0.387 | -0.3 |
| 4 | L_{78} | 1.570 | -0.603 | 2.196 | $\tau_{4opt}?$ |

Procedimiento:

- $R_{fc} = (-\infty, -0.106) \Rightarrow R_4 \cap R_{fc} \neq \emptyset$
- $Q_f = 0.446$ (Determinado por $f_1 f_2$)
- $C_{23} = 0.113$ (Determinado por $f_2 f_3$)
- $C_{23} < Q_f$, R_{fc} es Infinito \Rightarrow Caso 4.

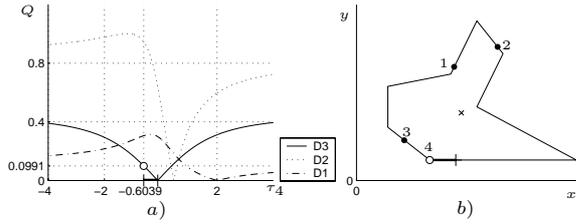


Figura 7: Ejemplo del Caso 4: a) Distancias a las caras de \mathcal{P}_1 , rango de posibles soluciones $R_4 \cap R_{fc_4}$ (segmento oscuro) y Q máximo (círculo blanco); b) soluciones posibles sobre el lado del objeto (segmento oscuro) y posición óptima del cuarto dedo (círculo blanco).

5. $D_1 = D_3 \Rightarrow \tau_4' = -1.496 \in R_{fc}$
6. $\tau_4' \notin R_4 \Rightarrow \tau_4' = -0.603$ (extremo de R_4)
Entonces: $D_1(\tau_4') = 0.305$, $D_2(\tau_4') = 0.9453$,
 $D_3(\tau_4') = 0.099$.
7. $D_2(\tau_4') \geq D_1(\tau_4') \geq D_3(\tau_4')$
8. $\partial D_1 / \partial \tau_4 = 0 \Rightarrow \tau_4'''' = -0.366 \in R_4 \cap R_{fc}$
Entonces: $D_1(\tau_4''') = 0.313$, $D_2(\tau_4''') = 0.847$,
 $D_3(\tau_4''') = 0.053$.

Solución: $\tau_{opt} = -0.603$, $Q = 0.099$.

Las distancias de las caras desconocidas de \mathcal{P}_1 en función de τ_4 y la solución obtenida se ilustran en la Figura 7. La solución óptima es un extremo de un lado tal como se indica en la figura; en una aprehensión real es conveniente considerar una distancia de seguridad al vértice.

Ejemplo del Caso 2 degenerado. Los datos iniciales son:

| Dedo | Lado | α_i | τ_{min_i} | τ_{max_i} | τ_i |
|------|----------|------------|----------------|----------------|----------------|
| 1 | L_{78} | 1.570 | -0.603 | 2.196 | -0.4 |
| 2 | L_{67} | 4.112 | -2.463 | -0.160 | -1 |
| 3 | L_{78} | 1.570 | -0.603 | 2.196 | 1 |
| 4 | L_{23} | 4.957 | 0.032 | 1.204 | $\tau_{4opt}?$ |

Procedimiento:

1. $R_{fc} = (-0.895, 0.959) \Rightarrow R_4 \cap R_{fc} \neq \emptyset$
2. $C_{max} = 0.122$ (determinado por f_1f_4 y f_3f_4)
3. R_{fc} es Acotado \Rightarrow Caso 2 degenerado.
4. $D_1 = D_3 \Rightarrow \tau_4' = 0.088 \in R_4 \cap R_{fc}$
Entonces: $D_1(\tau_4') = 0.189$, $D_2(\tau_4') = 0.122$,
 $D_3(\tau_4') = 0.189$.
5. $D_2(\tau_4') < D_1(\tau_4') = D_3(\tau_4')$
6. $D_2 = D_3 \Rightarrow \tau_4'' = 0.320 \in R_4 \cap R_{fc}$
Entonces: $D_1(\tau_4'') = 0.212$, $D_2(\tau_4'') = 0.122$,
 $D_3(\tau_4'') = 0.122$.
7. $D_2 = D_1 \Rightarrow \tau_4''' = -0.360 \in R_4 \cap R_{fc}$
Entonces: $D_1(\tau_4''') = 0.122$, $D_2(\tau_4''') = 0.122$,
 $D_3(\tau_4''') = 0.372$.

Solución: $\tau_{opt} = 0.088$, $Q = 0.122$.

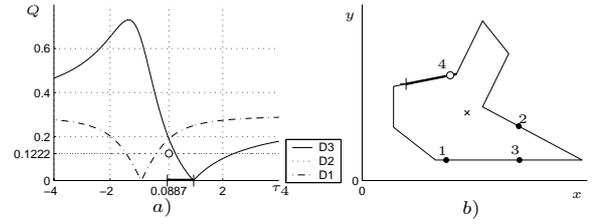


Figura 8: Ejemplo del Caso 2 degenerado: a) Distancias a las caras de \mathcal{P}_1 , rango de posibles soluciones $R_4 \cap R_{fc_4}$ (segmento oscuro) y Q máximo (círculo blanco); b) soluciones posibles sobre el lado del objeto (segmento oscuro) y posición óptima del cuarto dedo (círculo blanco).

Este caso tiene algunas peculiaridades debido a que dos puntos de contacto están en el mismo lado (dedos 1 y 3). La consecuencia es que la distancia D_2 entre el origen y el plano definido por las dos fuerzas generalizadas producidas por los dedos 1, 3 y 4 es constante ($D_2 = 0.122$) e independiente de τ_4 . D_2 es más pequeña que $D_1(\tau_4') = D_3(\tau_4')$, entonces el intervalo $[\tau_4''', \tau_4''']$ define un rango de valores óptimos, es decir, para cualquier valor de $\tau_4 \in [\tau_4''', \tau_4''']$ se obtiene el valor $Q = 0.122$. En este caso, se escoge como valor óptimo τ_4' ya que pertenece al rango de valores óptimos y, además, maximiza las distancias D_1 y D_2 .

Las distancias a las caras desconocidas de \mathcal{P}_1 en función de τ_4 y la solución óptima obtenida se ilustran en la Figura 8.

5 CONCLUSIONES

El artículo trata el problema de determinar la aprehensión óptima de un objeto poligonal utilizando cuatro dedos. Se propone un algoritmo basado en la medida de calidad propuesta por Ferrari y Canny [5] que soluciona de forma analítica el caso particular de determinar la posición óptima de un cuarto dedo a partir de tres dedos ya posicionados. La extensión al caso general en que la posición de los cuatro es desconocida está en desarrollo. El subespacio de fuerzas se utiliza para establecer cotas a la medida de calidad que son de utilidad en la determinación de la aprehensión óptima así como en las demostraciones de algunas propiedades intrínsecas al problema, como el tipo de rango de soluciones en cada lado. Aunque esta propiedad es marginalmente usada en la búsqueda de la posición óptima del cuarto dedo, es de particular relevancia en la resolución del problema general de buscar las posiciones de los cuatro dedos.

Referencias

- [1] Bicchi, A. On the Closure Properties of Robotics Grasping. *Int. Journal of Robotics Research*, 14, (4), pp. 319-334, 1995.
- [2] Bicchi, A. Hands for Dexterous Manipulation and Robust Grasping: A Difficult Road Toward Simplicity. *IEEE Trans. on Robotics and Automation*, 16, (6), pp. 652-662, 2000.
- [3] Borst, Ch., Fischer, M. and Hirzinger, G. A Fast and Robust Grasp Planner for Arbitrary 3D Objects. *In Proc. IEEE ICRA*, pp. 1890-1896. Detroit, Michigan, 1999.
- [4] Ding, D., Liu, Y.-H. and Wang, S. Computing 3-D Optimal Form-Closure Grasps. *In Proc. IEEE ICRA*, pp. 3573-3578. San Francisco, California, 2000.
- [5] Ferrari, C. and Canny, J. Planning Optimal Grasps. *In Proc. IEEE ICRA*, pp. 2290-2295. Nice, France, 1992.
- [6] Mirtich, B. and Canny, J. Easily Computable Optimum Grasps in 2-D and 3-D. *In Proc. IEEE ICRA*, pp. 739-747, San Diego, California, 1994.
- [7] Mishra, B., Schwartz, J.T. and Sharir, M. On the Existence and Synthesis of Multifinger Positive Grips. *Algorithmica, Special Issue: Robotics*, 2, (4), pp. 541-558, 1987.
- [8] Mishra, B. Grasp Metrics: Optimality and Complexity. *Algorithmic Foundations of Robotics*, pp. 137-166, A.K. Peters, Wellesley, MA, 1995.
- [9] Nguyen, V.D. Constructing Force-Closure Grasps. *Int. Journal of Robotics Research*, 7, (3), pp. 3-16, 1988.
- [10] Ponce, J. and Faverjon, B. On Computing Three Finger Force-Closure Grasp of Polygonal Objects. *IEEE Trans. on Robotics and Automation*, 11, (6), pp. 868-881, 1995.
- [11] Ponce, J., Sullivan, S, Sudsang, A., Boissonnat, J.-D. and Merlet, J.-P. On Computing Four-Finger Equilibrium and Force-Closure Grasps of Polyhedral Objects. *Int. Journal of Robotics Research*, 16, (1), pp. 11-35, 1997.
- [12] Pollard, N. Synthesizing Grasps from Generalized Prototypes. *In proc. IEEE ICRA*, pp. 2124-2130. Minneapolis, Minnesota, 1996.
- [13] Shimoga, K.B. Robot Grasp Synthesis: A Survey. *Int. Journal of Robotics Research*, 15, (3), pp. 230-266, 1996.